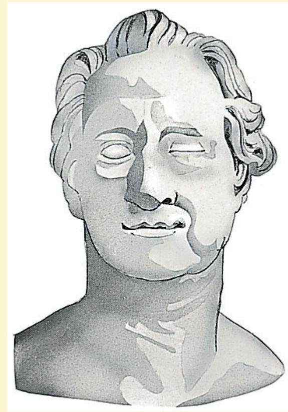
Wer ist Binomi? – Ein mathematisches Phantom

Als Entdecker der binomischen Formeln wird immer wieder Luigi Alessandro Binomi (*1727; †1643) genannt.
In seiner Biographie kann man nachlesen, dass er schon als Kind Glasmurmeln zählte und zu symmetrischen Figuren anordnete. Er starb einsam als Schafzüchter auf der Insel Sardinien, wo sein Grabstein mit der Inschrift der 3. binomischen Formel noch heute steht.
Allerdings gibt es auch Geschichten über seinen älteren Bruder Francesco Binomi (*1472; †1483), der die Formeln entdeckt haben soll. Andere Forscher nennen Giacomo Binomi, Jabdal Baptist Binomi oder sogar Karl Binomi als Entdecker. Die Sache bleibt rätselhaft!



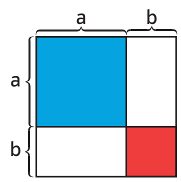
*Francesco Binomi (*1472;+1483)*

Was hat es eigentlich mit diesen Binomen auf sich?
Als Binom, was im Lateinischen so viel heißt wie Zweinamen, wird ein zweigliedriger Term bezeichnet.
Als Summe oder Differenz ergeben sich z. B. **a + b** und **a – b**.
Werden nun diese Binome miteinander multipliziert hat man drei Möglichkeiten.

1. (a + b)(a + b) **2. (a – b)(a – b)** **3. (a + b)(a – b)**

○ a) Finde nun selbst die binomischen Formeln! Multipliziere die Klammern aus und fasse die Ergebnisse zusammen.

◒ b) Die Abbildung rechts zeigt beispielhaft, wie man die erste Möglichkeit für a = 5 und b = 3 grafisch darstellen kann. Erkläre die grafische Herleitung in eigenen Worten.



● c) Finde auch für die zweite und dritte Möglichkeit eine grafische Darstellung und erkläre die Herleitung der Formeln aus der Grafik.

◒ d) Eine der binomischen Formeln hilft bei Rechentricks. So lassen sich z. B. $97 \cdot 103 = 9991$ oder $32 \cdot 28 = 896$ schnell im Kopf berechnen. Welche der drei binomischen Formeln ist hier hilfreich und wie funktioniert dieser schnelle Kopfrechentrick?

◒ e) Binomischen Formeln helfen rückwärts angewandt beim Faktorisieren. Vereinfache damit den Bruch $\frac{4x^2 + 12x + 9}{2x + 3}$.

● f) Eine quadratische Funktion ist durch die Gleichung $f(x) = x^2 - 4x + 4$ und eine zweite quadratische Funktion ist durch $g(x) = x^2 - 4x + 3$ gegeben. Schreibe die Gleichung jeweils als Produkt, und gib anschließend die Nullstellen der Funktion an.

Bildquelle: Klett-Archiv

○ g) Bestimmt kam dir die Geschichte mit Luigi Alessandro und Francesco Binomi ziemlich komisch vor. In Wirklichkeit sind beide Figuren erfunden und geistern als mathematische Mysterien durch Mathematikbücher und das Internet. Sie haben es sogar zu einem Wikipedia-Eintrag gebracht!

Da du jetzt selbst die binomischen Formeln, ihre Herleitung und Anwendung entdeckt hast, darfst auch du dich jetzt Binomi nennen.
Trage deinen Vornamen ein und zeichen ein Portrait von dir.

?

____________________ Binomi

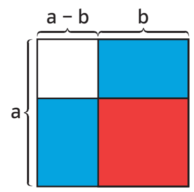
Lernvoraussetzungen	Eignung ab
■ Termumfomungen ■ Ausmultiplizieren von Summen ■ Flächenberechnung ■ Quadratische Funktionen ■ Quadratische Ergänzung	Klassenstufen 8/9

Wer ist Binomi? – Ein mathematisches Phantom – Lösungen

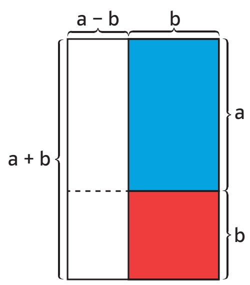
a) $(a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a + a \cdot (-b) + (-b) \cdot a + (-b) \cdot (-b) = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-b) = a^2 - b^2$

b) Die Seitenlänge des blauen Quadrats beträgt $a = 5$ und die Seitenlänge des roten Quadrats beträgt $b = 3$.
Die Gesamtfläche des großen Quadrats ergibt sich aus $(a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2 = (5 + 3)^2 = 64$
Betrachtet man die Teilflächen, so sieht man ein blaues Quadrat mit Flächeninhalt a^2, ein rotes Quadrat mit dem Flächeninhalt b^2 und zwei weiße Rechtecke mit einem Flächeninhalt von jeweils $a \cdot b$.
Als Summe der Flächeninhalte ergibt sich: $a^2 + 2ab + b^2 = 25 + 2 \cdot 15 + 9 = 64$

c) Eine grafische Darstellung für $(a - b)^2 = (5 - 3)^2 = 4$ sieht folgendermaßen aus:
Der Flächeninhalt des weißen Quadrats ergibt sich, wenn man von vom großen Quadrat mit Flächeninhalt a^2 zweimal das Rechteck mit dem Flächeninhalt $a \cdot b$ abzieht. Dabei wird allerdings die rote Fläche mit Flächeninhalt b^2 doppelt abgezogen und muss daher wieder addiert werden.
Es ergibt sich: $a^2 - 2ab + b^2 = 25 - 2 \cdot 15 + 9 = 4$



Das weiße Rechteck hat den Flächeninhalt $(a + b) \cdot (a - b) = (5 + 3) \cdot (5 - 3) = 8 \cdot 2 = 16$
Man erhält diesen Flächeninhalt anschaulich, wenn man für den oberen Teil $(a^2 - ab)$ rechnet und für den unteren Teil $(ab - b^2)$. Für beide Teile zusammen ergibt sich
$a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$



d) Bei der gesuchten Formel handelt sich um die dritte binomische Formel. Sie erleichtert dann eine Multiplikation, wenn die beiden Faktoren von einer Zahl, die man einfach quadrieren kann, den gleichen Abstand haben. So rechnet man
$97 \cdot 103 = (100 - 3)(100 + 3) = 100^2 - 3^2 = 9991$ oder $32 \cdot 28 = (30 + 2)(30 - 2) = 30^2 - 2^2 = 896$.

e) Wenn man die erste binomische Formel anwendet, lässt sich der Term leicht vereinfachen.

$$\frac{4x^2 + 12x + 9}{2x + 3} = \frac{(2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 3 + 3^2}{2x + 3} = \frac{(2x + 3)^2}{2x + 3} = 2x + 3$$

f) Wird bei quadratischen Funktionen die zweite binomische Formel angewandt, so ergibt sich bei der ersten quadratischen Gleichung $f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ und die Nullstelle $x = 2$ ist leicht abzulesen. Passt der Term nicht genau zu einer der binomischen Formeln, wird die Gleichung quadratisch mit der passenden Zahl ergänzt und die Nullstellen durch Nullsetzen ermittelt.

$g(x) = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x - 2)^2 - 1$

$0 = (x - 2)^2 - 1$

$1 = (x - 2)^2$

Wurzelziehen führt zu $(x - 2) = \sqrt{1}$ mit den Fällen $(x - 2) = 1$ oder $(x - 2) = -1$ und den Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = 1$.

g) „Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, sie etwas unterhaltsamer zu gestalten.“
Blaise Pascal (1623–1662)