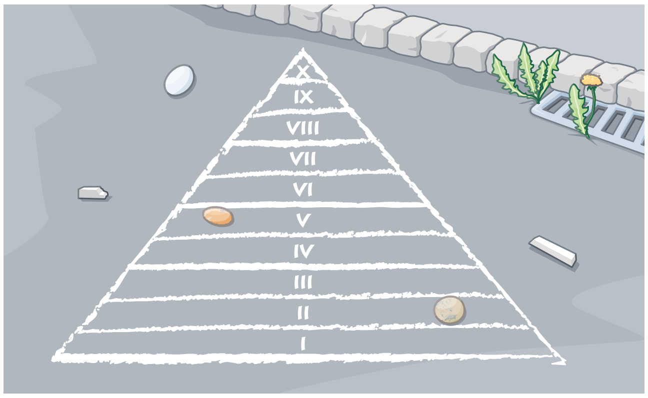
Delta Spiel

„Traurig lässt der Knabe die Nüsse liegen, wenn ihn der Lehrer wieder zum Unterricht ruft", schreibt der römische Dichter Martial. Das Spiel mit den Nüssen war bei den römischen Kindern sehr beliebt.

Aufgaben

○ **1** Die Abbildung zeigt das Spielfeld für das sogenannte Delta-Spiel, das so z.B. im Archäologiepark Xanten gezeigt wird.

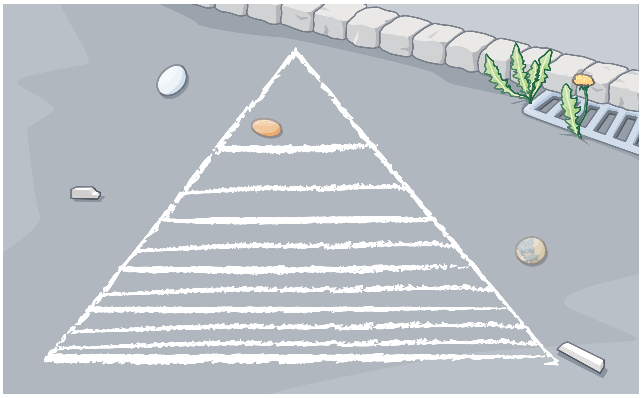
Für das Spiel zeichnen die Kinder ein gleichseitiges Dreieck (entsprechend dem griechischen Großbuchstaben delta Δ) mit einer Seitenlänge von etwa 1,5 m auf den Fußboden. Durch Parallelen zu einer Dreiecksseite wird es in zehn gleich hohe Teilflächen zerlegt, die von unten nach oben mit den römischen Zahlen von I bis X beschriftet werden.
Jeder Spieler erhält z.B. fünf Nüsse, die er aus einer bestimmten Entfernung auf das Dreieck wirft. Die Punkte der Felder, auf denen die Nüsse liegen bleiben, werden addiert. Wer die meisten Punkte erzielt, der hat das Spiel gewonnen.



In welchem Verhältnis stehen bei dieser Aufteilung die Flächeninhalte der zehn Felder zueinander?

○ **2** Da die Felder mit höheren Nummern recht klein sind und daher selten getroffen werden, beschließen die Kinder, die Flächen der Felder alle gleich groß zu machen.
Beim hier abgebildeten Spielfeld sieht es so aus, als hätten die Spieler eine solche Feldeinteilung nach Augenmaß versucht.

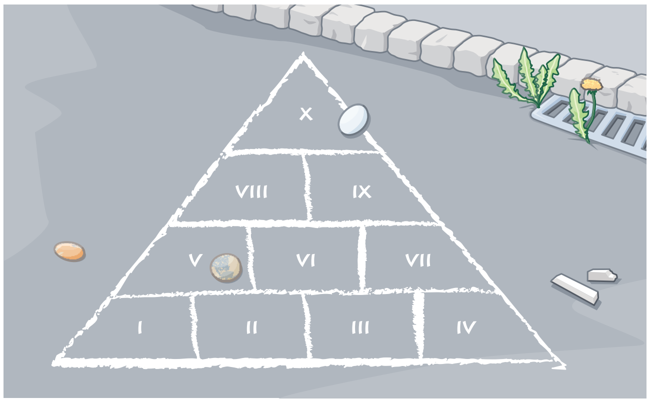
Wie muss man in diesem Fall die Zerlegung des Dreiecks vornehmen?



Bildquelle: Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=387188

○ **3** Eine andere Möglichkeit der Einteilung zeigt diese Abbildung. Hier könnte ebenfalls versucht worden sein, die Flächeninhalte der zehn Felder gleich groß zu machen.

Wie muss in diesem Fall die Zerlegung des Dreiecks vorgenommen werden?



○ **4** Erfinde andere Aufteilungen!

Lernvoraussetzungen	Eignung ab
■ Zentrische Streckung ■ Flächenberechnung von Dreiecken und Trapezen ■ Rechnen mit Quadratwurzeln	Klassenstufen 8 und 9

Delta Spiel – Lösungen

1 Lösung mithilfe der zentrischen Streckung (Figur 1)
Das gleichseitige Dreieck habe den Flächeninhalt A. Die Flächeninhalte der zehn Teilflächen werden mit A_{10} (Dreieck an der Spitze), A_9 (darunterliegendes Trapez, Feld mit der Nummer 9) usw. bezeichnet.
Wegen der gleich breiten Streifen wird das Dreieck mit dem Flächeninhalt A_{10} durch eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $k = 2$ auf das Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{10} + A_9$ abgebildet. Entsprechend wird das Dreieck mit dem Flächeninhalt A_{10} durch eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $k = 3$ auf das Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{10} + A_9 + A_8$ abgebildet usw.
Damit erhält man:

$A_{10} = 1 \cdot A_{10}$
$A_9 = 4 \cdot A_{10} - A_{10} = 3 \cdot A_{10}$
$A_8 = 9 \cdot A_{10} - (A_{10} + A_9) = 5 \cdot A_{10}$
$A_7 = \ldots = 16 \cdot A_{10} - (A_{10} + A_9 + A_8) = 7 \cdot A_{10}$
$A_6 = \ldots = 9 \cdot A_{10}$
$A_5 = \ldots = 11 \cdot A_{10}$
$A_4 = \ldots = 13 \cdot A_{10}$
$A_3 = \ldots = 15 \cdot A_{10}$
$A_2 = \ldots = 17 \cdot A_{10}$
$A_1 = \ldots = 19 \cdot A_{10}$

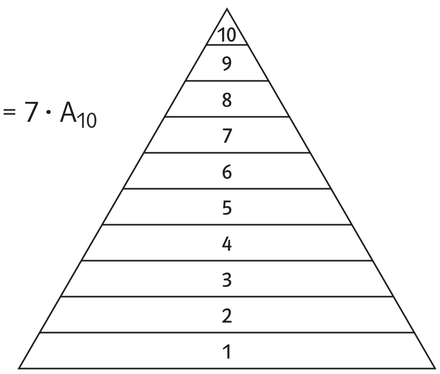


Fig. 1

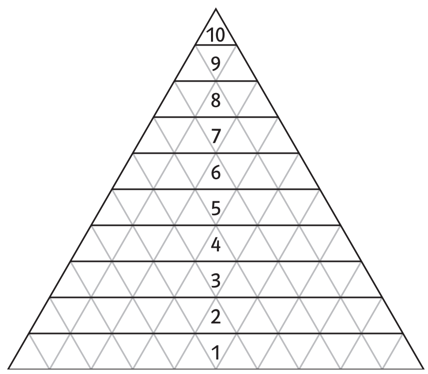
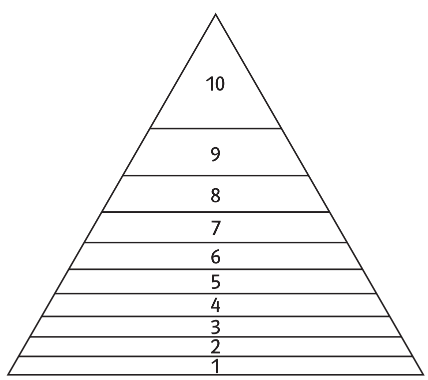


Fig. 2

Das Ausgangsdreieck mit dem Flächeninhalt A wird also in zehn Teilflächen zerlegt, deren Flächeninhalte sich wie 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11 : 13 : 15 : 17 : 19 verhalten.
Da insgesamt $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100$ gleichgroße Teilflächen entstehen, hat das Feld mit der Nummer n den Flächeninhalt $A_n = \frac{20 - (2n - 1)}{100} \cdot A$.

Zeichnerische Lösung (Figur 2).
Siehe die abgebildete Parkettierung!

2 Das gleichseitige Dreieck habe den Flächeninhalt A. Dann gilt:
$A_{10} = A_9 = A_8 = A_7 = A_6 = A_5 = A_4 = A_3 = A_2 = A_1 = \frac{1}{10}A$
Im Folgenden werden die Höhen h_{10}, h_9, h_8, usw. der Dreiecke mit den Flächeninhalten A_{10}, $A_{10} + A_9$, $A_{10} + A_9 + A_8$ usw. berechnet.



Das Dreieck mit dem Flächeninhalt A_{10} wird durch eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $k = \sqrt{2}$ auf das Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{10} + A_9$ abgebildet. Entsprechend wird das Dreieck mit dem Flächeninhalt A_{10} durch eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $k = \sqrt{3}$ auf das Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{10} + A_9 + A_8$ abgebildet usw. bis schließlich das Dreieck mit dem Flächeninhalt A_{10} auf das gesamte Dreieck mit dem Flächeninhalt A mit dem Streckfaktor $k = \sqrt{10}$ abgebildet wird.

Bezeichnet man die Höhe des gegebenen gleichseitigen Dreiecks mit h, dann gilt für die von dessen Spitze aus gemessenen Höhen der Teildreiecke:

$h_{10} = \sqrt{\frac{1}{10}} \cdot h \approx 0{,}316 \cdot h$ für das Dreieck mit dem Flächeninhalt A_{10}

$h_9 = \sqrt{\frac{2}{10}} \cdot h \approx 0{,}447 \cdot h$ für das Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{10} + A_9$

$h_8 = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot h \approx 0{,}548 \cdot h$ für das Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{10} + A_9 + A_8$

$h_7 = \sqrt{\frac{4}{10}} \cdot h \approx 0{,}632 \cdot h$ für das Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{10} + A_9 + A_8 + A_7$

$h_6 = \sqrt{\frac{5}{10}} \cdot h \approx 0{,}707 \cdot h$ für das Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{10} + A_9 + A_8 + A_7 + A_6$

$h_5 = \sqrt{\frac{6}{10}} \cdot h \approx 0{,}775 \cdot h$ für das Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{10} + A_9 + A_8 + A_7 + A_6 + A_5$

$h_4 = \sqrt{\frac{7}{10}} \cdot h \approx 0{,}837 \cdot h$ für das Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{10} + A_9 + A_8 + A_7 + A_6 + A_5 + A_4$

$h_3 = \sqrt{\frac{8}{10}} \cdot h \approx 0{,}894 \cdot h$ für das Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{10} + A_9 + A_8 + A_7 + A_6 + A_5 + A_4 + A_3$

$h_2 = \sqrt{\frac{9}{10}} \cdot h \approx 0{,}949 \cdot h$ für das Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{10} + A_9 + A_8 + A_7 + A_6 + A_5 + A_4 + A_3 + A_2$

$h_1 = \sqrt{\frac{10}{10}} \cdot h = h$ für das Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{10} + A_9 + A_8 + A_7 + A_6 + A_5 + A_4 + A_3 + A_2 + A$

Damit lassen sich die Parallelen näherungsweise einzeichnen.
Anmerkung
Alle Höhen lassen sich, ausgehend von der Höhe h des großen Dreiecks, auch mit Zirkel und Lineal konstruieren.

3 Wie bei Aufgabe 2 ergibt sich:
Das Dreieck mit dem Flächeninhalt A_{10} hat die Höhe $h_{10} = \sqrt{\frac{1}{10}} \cdot h \approx 0{,}316 \cdot h$.
Das Dreieck mit dem Flächeninhalt A_{10} wird durch eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $k = \sqrt{3}$ auf das Dreieck mit dem dreifachen Flächeninhalt $A_{10} + A_9 + A_8$ abgebildet. Damit liegt die Lage der Basis dieses Dreiecks fest:

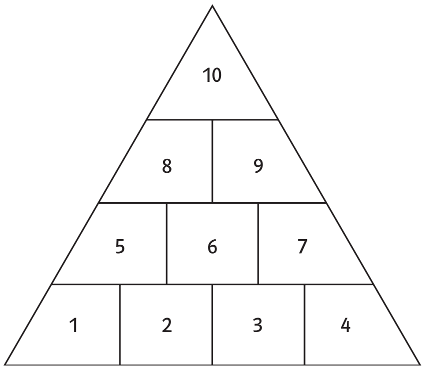
$h_8 = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot h \approx 0{,}548 \cdot h$ für das Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{10} + A_9 + A_8$

Entsprechend wird das Dreieck mit dem Flächeninhalt A_{10} durch eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor k mit $k = \sqrt{6}$ auf das Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{10} + A_9 + A_8 + A_7 + A_6 + A_5$ abgebildet und die Lage der Basis dieses Dreiecks ist damit ebenfalls bekannt:

$h_5 = \sqrt{\frac{6}{10}} \cdot h \approx 0{,}775 \cdot h$ für das Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{10} + A_9 + A_8 + A_7 + A_6 + A_5$

Nun muss noch die Lage der vertikalen Begrenzungslinien ermittelt werden.

Die vertikalen Begrenzungslinien zwischen den Trapezen mit den Nummern 8 und 9 bzw. der Rechtecke mit den Nummern 2 und 3 liegen auf der Symmetrieachse des
gegebenen Dreiecks.



Das Rechteck mit der Nummer 6 hat die Höhe

$h_5 - h_8 = \sqrt{\frac{6}{10}} \cdot h - \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot h$

$h_5 - h_8 = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot h \cdot (\sqrt{2} - 1)$

Sein Flächeninhalt beträgt

$A_6 = \frac{1}{10} A$

$A_6 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot a^2$

Die Rechtecksbreite b_6 ergibt sich mit $h = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a$ zu

$b_6 = A_6 : (h_5 - h_8)$

$b_6 = \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot a^2\right) : \left(\sqrt{\frac{3}{10}} \cdot h \cdot (\sqrt{2} - 1)\right)$

$b_6 = \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot a^2\right) : \left(\sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a\,(\sqrt{2} - 1)\right)$

$b_6 = \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{30}} \cdot a \approx 0{,}220 \cdot a$

Wegen der zur Symmetrieachse des Dreiecks symmetrischen Lage dieses Rechtecks liegen dessen vertikale Begrenzungslinien fest.

Das Rechteck mit der Nummer 2 hat die Höhe

$h - h_8 = h - \sqrt{\frac{6}{10}} \cdot h$

$h - h_8 = \left(1 - \sqrt{\frac{6}{10}}\right) \cdot h$

Sein Flächeninhalt beträgt

$A_2 = \frac{1}{10} A$

$A_2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot a^2$

Die Rechtecksbreite b_2 ergibt sich mit $h = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a$ zu

$b_2 = A_2 : (h - h_8)$

$b_6 = \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot a^2\right) : \left(\left(1 - \sqrt{\frac{6}{10}}\right) \cdot h\right)$

$b_6 = \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot a^2\right) : \left(\left(1 - \sqrt{\frac{6}{10}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a\right)\right)$

$b_6 = \frac{\sqrt{60} + 10}{80} \cdot a \approx 0{,}222 \cdot a$

Wegen der zur Symmetrieachse des Dreiecks symmetrischen Lage der Rechtecke mit den Nummern 2 und 3 liegen deren vertikale Begrenzungslinien fest.

Damit sind alle Maße für die Zeichnung bekannt.

4 Freie Lösungen