

Fermat-Primzahlen

Teilt man eine Kreislinie in drei oder mehr gleich lange Bögen und verbindet dann die benachbarten Teilpunkte, so erhält man ein regelmäßiges Vieleck. Dabei ergibt sich sofort das Problem, ob man einen Kreis mithilfe von Zirkel und Lineal überhaupt in 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ... gleich lange Bögen teilen kann. Euklid (um 300 v.Chr.) hat in seinen berühmten *Elementen* die Konstruktion der regulären Vielecke für $n = 3, 4, 5, 6, 15$ durchgeführt. Durch fortlaufende Seitenhalbierung gelangt man hieraus zu den regulären Vielecken mit $n = 12, 24, 48 \dots$ bzw. $8, 16, 32, 64 \dots$ bzw. $10, 20, 40, 80, \dots$ bzw. $30, 60, 120 \dots$. Diese Konstruktionen lernt man meist noch im Schulunterricht kennen.



Pierre de Fermat

Aufgaben

- 1 Konstruiere ein regelmäßiges Dreieck, Sechseck, Viereck, Achteck.

Indessen blieb die Konstruktion des regulären 7, 9, 11, 13, 14, 17-Ecks nicht nur bei Euklid, sondern auch für die nächsten 2000 Jahre offen. Man fand eine Vielzahl von guten Näherungslösungen, z.B. auch durch Albrecht Dürer, aber eben keine exakte Konstruktion. Es schien daher nicht ausgeschlossen zu sein, dass es hierfür gar keine Konstruktion mithilfe von Zirkel und Lineal gibt. Das Problem wurde von C. F. Gauss in seinem achtzehnten Lebensjahr aufgenommen und dann auch vollständig beantwortet. Gauss fand heraus, dass ein regelmäßiges n -Eck dann und nur dann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, wenn die ungeraden Primfaktoren von n voneinander verschiedene „Fermat-Primzahlen“ $F_k = 2^{2^k} + 1$ sind, wenn sich die Eckenzahl also in der Form $n = 2^r \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_s$ ($r \in \mathbb{N}_0$ und $s \geq 2$) schreiben lässt mit verschiedenen Fermat'schen Primzahlen $p_2, p_3, p_4 \dots p_s$.

- 2 Berechne die Zahlen F_k für $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Bestätige: Diese Zahlen sind Primzahlen.

Fermat (1601 bis 1665) hat (ohne Beweis) behauptet, *alle* Zahlen der Form $F_k = 2^{2^k} + 1$ seien Primzahlen. Dies trifft schon für $k = 5$ nicht mehr zu, wie bereits Euler 1732 durch die Zerlegung $4294967297 = 641 \cdot 6700417$ gezeigt hat.

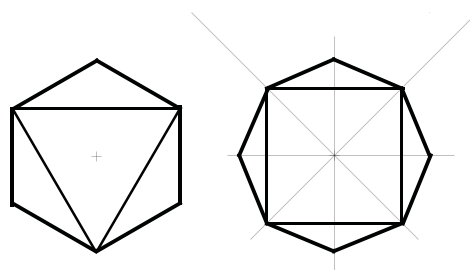
- 3 Untersuche nun, welche regelmäßigen n -Ecke für $3 \leq n \leq 20$ konstruierbar sind, indem du eine Zerlegung der Zahl n in der Form $n = 2^r \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_s$ herzustellen versuchst.
- 4 a) Ist das 2015-Eck konstruierbar?
b) Ist das 3084-Eck konstruierbar?
- 5 Kann man die folgenden Winkel durch Konstruktion exakt teilen?
a) 60° in fünf gleiche Teile
b) 90° in sieben gleiche Teile
- 6 Lässt sich ein Winkel der Weite $10^\circ 35 \frac{11}{17}''$ konstruieren?

Niveaustufen: ○ leicht ○ mittel ● schwer

Lernvoraussetzungen	Eignung ab
<ul style="list-style-type: none"> ■ Gleichseitiges Dreieck ■ Quadrat ■ Winkelhalbierende ■ Kreis ■ Rechnen mit Winkelweiten (auch Winkelminuten, Winkelsekunden) ■ Faktorisierung natürlicher Zahlen ■ Berechnung einfacher Potenzen mit natürlichen Hochzahlen 	Klassenstufe 8

Fermat-Primzahlen – Lösungen

- 1 Für das Sechseck trägt man den Kreisradius sechsmal auf der Kreislinie ab. Überspringen jeweils eines Punktes liefert das Dreieck. Beim Quadrat halbiert man jeweils den Winkel zwischen zwei zueinander orthogonalen Symmetrieachsen und erhält das Achteck.



- 2 Alle diese Zahlen sind Primzahlen.

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3, \quad F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5, \quad F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17, \quad F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257, \quad F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$$

- 3

n	Zerlegung	Konstruierbar?	n	Zerlegung	Konstruierbar?
3	F_0	ja	12	$2^2 \cdot F_0$	ja
4	2^2	ja	13	–	nein
5	F_1	ja	14	–	nein
6	$2 \cdot F_0$	ja	15	$F_0 \cdot F_1$	ja
7	–	nein	16	2^4	ja
8	2^3	ja	17	F_2	ja
9	–	nein	18	–	nein
10	$2 \cdot F_1$	ja	19	–	nein
11	–	nein	20	$2^2 \cdot F_1$	ja

- 4 a) Da $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ gilt, kann das 2015-Eck *nicht* konstruiert werden.
b) Da $3084 = 2^2 \cdot 3 \cdot 257 = 2^2 \cdot F_0 \cdot F_3$ gilt, kann das 3084-Eck konstruiert werden.
- 5 a) Die Teilung dieses 60° -Winkels in fünf gleiche Teile führt zum regelmäßigen 30-Eck.
Da $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot F_0 \cdot F_1$ gilt, kann man diese Teilung konstruieren.
b) Die Teilung dieses 90° -Winkels in sieben gleiche Teile führt zum regelmäßigen 28-Eck.
Da $28 = 2^2 \cdot 7$ gilt, kann die Konstruktion *nicht* durchgeführt werden.

- 6 Der angegebene Winkel führt zu einem 34-Eck, denn es gilt:
- $$\begin{aligned} 34 \cdot 10^\circ + 34 \cdot 35' + 34 \cdot 17'' + 34 \cdot \frac{11}{17}'' &= 340^\circ + 1190' + 578'' + 22'' \\ &= 340^\circ + 1190' + 600'' \\ &= 340^\circ + 1190' + 10' \\ &= 340^\circ + 1200' \\ &= 340^\circ + 20^\circ \\ &= 360^\circ \end{aligned}$$

Da $34 = 2 \cdot 17 = 2 \cdot F_2$ gilt, ist das 34-Eck konstruierbar und damit der angegebene Winkel.