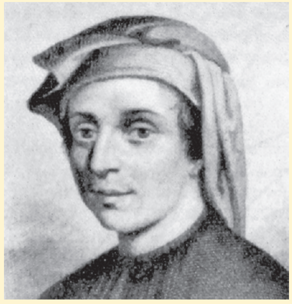
Fibonacci-Zahlen

Mit seinem berühmten Buch „Liber Abaci“ über die Kunst des Rechnens versuchte Fibonacci die Italiener davon zu überzeugen, dass das Rechnen mit arabischen Ziffern viel einfacher und übersichtlicher ist als das Rechnen mit römischen Zahlzeichen.



*Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci (*1175, †1240)*

Aufgaben

◒ 1 Ein Rechentrick

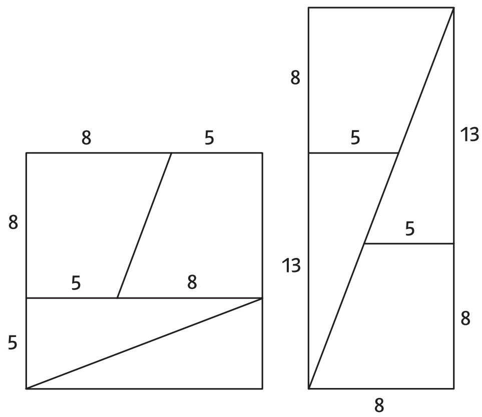
Max „beweist“ Moritz, wie schnell er addieren kann!
Er fordert Moritz auf, zwei beliebige Zahlen an der Tafel untereinander zu schreiben, beispielsweise 2 und 5. Darunter soll er die Summe dieser beiden Zahlen schreiben und darunter erneut die Summe der letzten beiden Zahlen. Dies soll so lange geschehen, bis insgesamt zehn Zahlen untereinander stehen.
Beide addieren jetzt diese zehn Zahlen: Moritz schriftlich an der Tafel, Max im Kopf.
Max ist schneller fertig!

2
5
7
12
19
31
50
81
131
212
550

Moritz vermutet natürlich, dass Max schon beim Aufschreiben seiner Zahlen addiert hat und daher das Ergebnis kennt, ehe Moritz anfängt zu rechnen. Daher bittet er Moritz sich umzudrehen, während er seine zehn Zahlen untereinanderschreibt. Nachdem die zehn Zahlen notiert sind, wirft Max einen raschen Blick auf diese und hat erneut die Summe wesentlich schneller als Moritz gebildet.
Wie kann das sein? Wie macht das Max so schnell?
Tipp: Rechne verschiedene Beispiele und vergleiche das jeweilige Ergebnis mit den einzelnen Summanden!

◒ 2 Das verschwundene Flächenstück

Zerschneide ein Quadrat wie in der linken Abbildung angegeben. Anschließend kannst du aus den Teilen ein Rechteck wie in der rechten Abbildung zusammensetzen. Das Quadrat hat den Flächeninhalt 169, das Rechteck jedoch nur 168 Flächeneinheiten.
Wie kann das sein?



Niveaustufen: ○ einfach ◒ mittel ● schwierig

Bildquelle: „Fibonacci“ by unknown medieval artist – Scan from „Mathematical Circus“ by Martin Gardner, published 1981. Licensed under Public Domain via Commons – https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fibonacci.jpg#/media/File:Fibonacci.jpg

○ 3 Die Fibonacci-Folge

Die in den Abbildungen von Aufgabe 2 verwendeten Maßzahlen sind Glieder der sogenannten Fibonacci-Folge, die auf diese Weise definiert ist:

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ mit $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$, $n \in \mathbb{N}$

Das Folgeglied mit der Nummer $n + 2$ entsteht also durch Addition aus den beiden vorgehenden Folgegliedern mit den Nummern $n + 1$ und n. Die beiden ersten Folgeglieder heißen 1.

Gib die ersten zehn Glieder der Folge (Fibonacci-Zahlen) an.

Erkennst du, wo die Fibonacci-Zahlen in den Aufgaben 1 und 2 vorkommen?

● 4 Immer so weiter?

Berechne für die in Aufgabe 3 definierte Fibonacci-Folge die Differenzen

$a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ für $n \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Erkennst du ein Muster? Kannst du vorhersagen, welches Ergebnis sich für $n = 20$, $n = 101$ ergeben wird?

Geht das „immer so weiter“?

Niveaustufen: ○ einfach ◒ mittel ● schwierig

Lernvoraussetzungen	Eignung ab
■ Rechnen mit natürlichen Zahlen ■ Flächeninhalt des Rechtecks ■ Steigung einer Geraden ■ Rechnen mit Variablen	Klassenstufen 6 und 7

Anmerkung
Diese Vorgehensweise liefert eine erste Idee von der Beweismethode „Vollständige Induktion", einem sehr mächtigen Beweishilfsmittel in vielen Bereichen der Mathematik.

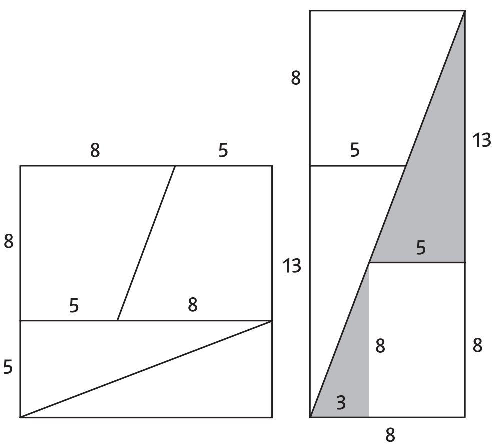
Fibonacci-Zahlen – Lösungen

1 Die folgende Überlegung wird mit beliebigen „Startzahlen" a und b durchgeführt, da damit der „Trick" leicht zu durchschauen ist.

a
b
$a + b$
$a + 2b$
$2a + 3b$
$3a + 5b$
$5a + 8b$
$8a + 13b$
$13a + 21b$
$21a + 34b$
$55a + 88b$

Für die Summe aller zehn Zahlen gilt:
$55a + 88b = 11 \cdot (5a + 8b)$
Man erkennt: Diese Summe ist das Elffache der siebten Zahl von oben!
Max muss folglich nur die siebte Zahl anschauen und im Kopf mit 11 multiplizieren, was sehr schnell geht:
Man addiert zur zweistelligen Zahl die Anzahl der Zehner und schreibt die Einer dahinter, fertig!
Beispiel: $76 \cdot 11 = 836$; 83 entsteht als Summe von 76 und der 7, der Anzahl der Zehner, 6 wird dahinter geschrieben!
Versuche eine allgemeine Begründung dieses Verfahrens.

2 Es ist klar, dass beim Zerschneiden und auf andere Weise Zusammenlegen der vier Teile kein Flächenstück verlorengehen kann. Das Rechteck in der rechten Abbildung muss also auch den Flächeninhalt 169 FE haben. Wo aber ist die fehlende Fläche?
Betrachtet man im Rechteck das untere trapezförmige Flächenstück, so hat der zu ihm zugehörende Teil der „Diagonalen" die Steigung $\frac{8}{3}$. Der Teil der „Diagonalen", der zu dem auf dem Trapez aufsitzenden Dreieck gehört, hat aber die Steigung $\frac{13}{5}$.
Wegen $\frac{8}{3} = \frac{40}{15}$ und $\frac{13}{5} = \frac{39}{15}$ sind diese Steigungen nicht gleich! Die angebliche „Diagonale" ist also überhaupt keine.
Die vier Flächenstücke überdecken sich also beinahe unmerklich längs der „Diagonalen".



3 Die ersten Fibonacci-Zahlen lauten: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233,…
In Aufgabe 1 treten die Fibonacci-Zahlen als Koeffizienten bei den Variablen a und b auf, da ja – wie bei der Definition der Fibonacci-Folge – immer die beiden letzten Zahlen addiert werden und die nächste Zahl ergeben.
In Aufgabe 2 treten die Fibonacci-Zahlen bei den Seitenlängen der Vierecke auf. Der „Verschwinde-Trick" beruht auf einer Eigenschaft dieser Zahlen, der in Aufgabe 4 thematisiert wird.

4 Ausrechnen ergibt:
$a_2^2 - a_1 \cdot a_3 = 1^2 - 1 \cdot 2 = -1$
$a_3^2 - a_2 \cdot a_4 = 2^2 - 1 \cdot 3 = 1$
$a_4^2 - a_3 \cdot a_5 = 3^2 - 2 \cdot 5 = -1$
$a_5^2 - a_4 \cdot a_6 = 5^2 - 3 \cdot 8 = 1$
$a_6^2 - a_5 \cdot a_7 = 8^2 - 5 \cdot 13 = -1$
$a_7^2 - a_6 \cdot a_8 = 13^2 - 8 \cdot 21 = 1$

Es scheint so, als wechselten sich die Ergebnisse −1 und 1 ab. Wenn dies immer zuträfe, dann wäre für $n = 20$ das Ergebnis −1 und für $n = 101$ das Ergebnis 1 zu erwarten.

Ausgehend von $a_7^2 - a_6 \cdot a_8 = 1$ kann man folgendermaßen überlegen:
$$\begin{aligned} a_8^2 - a_7 \cdot a_9 &= a_8^2 - a_7 \cdot (a_7 + a_8) \\ &= a_8^2 - a_7^2 - a_7 \cdot a_8 \\ &= a_8^2 - (1 + a_6 \cdot a_8) - a_7 \cdot a_8 \\ &= a_8^2 - a_8 \cdot (a_6 + a_7) - 1 \\ &= a_8^2 - a_8 \cdot a_8 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$
Mit diesem Ergebnis weiterarbeitend, kann man erhalten:
$$\begin{aligned} a_9^2 - a_8 \cdot a_{10} &= a_9^2 - a_8 \cdot (a_8 + a_9) \\ &= a_9^2 - a_8^2 - a_8 \cdot a_9 \\ &= a_9^2 - (-1 + a_7 \cdot a_9) - a_8 \cdot a_9 \\ &= a_9^2 - a_9 \cdot (a_7 + a_8) + 1 \\ &= a_9^2 - a_9 \cdot a_9 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$
Dabei wird bei jeder Rechnung in der jeweils dritten Zeile ausgenutzt, was man aus vorherigen Rechnungen bereits weiß: $a_7^2 = 1 + a_6 \cdot a_8$ bzw. $a_8^2 = -1 + a_7 \cdot a_9$.
Führt man jetzt wieder genau die entsprechenden Schritte für $n = 10$ aus, erhält man −1. Fortsetzen für $n = 11$ ergibt wieder 1. Die beiden Ergebnisse wiederholen sich demnach ad infinitum.