Neues vom Fußballplatz

Trainieren ist sowohl auf dem Fußballplatz als auch im Matheunterricht sehr wichtig für den Erfolg. Warum also nicht beides kombinieren? Hier ist ein Training, das in kurzer Zeit die Fitness in vielen Bereichen testet und Kondition verlangt.

Aufgaben

Ein Sportplatz liegt in der positiven x_1x_2-Ebene. Dabei ist eine Torauslinie die x_1-Achse und eine Seitenlinie die x_2-Achse.
Der Platz ist 60 Meter breit und 100 Meter lang.
Ein Torwart schlägt von seiner Tormitte aus fünf Meter vor seinem Tor den Ball in Richtung Mittelpunkt des Platzes ab. Das Tor steht auf der x_1-Achse.
Die Flugbahn des Balles soll als eine Parabel, die parallel zur x_2x_3-Ebene verläuft, angenommen werden:

$$x_3: f_k(x_2) = -0{,}02\,x_2^2 + k \cdot 0{,}55\,x_2 - k \cdot 2{,}5 \qquad x_2 \in \mathbb{R}^+,\ k \in \mathbb{R}^+$$

Hinweis: Der Ball soll als punktförmig angenommen werden.

◒ **1** Berechnen Sie k so, dass der Ball seine maximale Höhe nach einer Flugbahn von 27,5 Metern erreicht hat. Berechnen Sie auch die maximale Höhe des Balles.

◒ **2** Berechnen Sie mit dem von Ihnen in Aufgabe 1 gefundenen Parameter k die Koordinaten des Punktes, an dem der Ball wieder auf dem Boden aufschlägt.

○ **3** Drei Meter vor der Mittellinie in Richtung des Torwarts steht genau in der Mitte zwischen den beiden Seitenlinien ein Trainingstor. Das Tor hat eine Höhe von 2,44 Metern. Wird der Ball in diesem Trainingstor landen?

● **4** a) Berechnen Sie für den Punkt des Aufpralls auf dem Boden die Tangente der Flugbahn und berechnen Sie mithilfe der Analysis den Betrag des Aufprallwinkels des Balles auf dem Rasen.
b) Berechnen Sie den Aufprallwinkel mithilfe der analytischen Geometrie.

Ein Fußballtor hat eine Höhe von 2,44 Metern und eine Breite von 7,32 Metern. Die Sonne steht im Punkt $S(28\,|\,-15\,|\,10)$ hinter dem Torwart. Das Sonnenlicht kann als konzentrisch angenommen werden.

○ **5** Berechnen Sie die Koordinaten der Schattenpunkte und zeichnen Sie in einem sinnvollen Maßstab den Schatten des Tores.

○ **6** Begründen Sie, dass der Schatten der Querlatte parallel zur Querlatte verläuft.

◒ **7** Berechnen Sie mithilfe der Vektorrechnung den Flächeninhalt des Tores.

Niveaustufen: ○ einfach ◒ mittel ● schwierig

Bildquelle: iStockphoto (pkline), Calgary, Alberta

Der Torwart schafft es, 40 % seiner Abschläge exakt in den Mittelkreis des Fußballplatzes zu schießen. Bei einem Torwarttraining schießt er 100 Bälle von seinem Fünfmeterraum in Richtung Mittelkreis. Es wird unterstellt, dass es sich dabei um ein Bernoulli-Experiment handelt.

○ **8** Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung dieses Experiments.

◒ **9** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Torwart zwischen 28 und 50 Mal in den Mittelkreis trifft.

● **10** Berechnen Sie, wie oft der Torwart mindestens schießen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens einmal den Ball in den Mittelkreis zu schießen.

◒ **11** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Torwart genau 34 Bälle in den Mittelkreis schießt.

Der Sportplatz soll entlang einer Seitenlinie auf einer Länge von 100 Metern eine Naturtribüne in Form eines Erdhügels bekommen.
Der Hügel kann durch die Funktion $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{(-x+3)}$ beschrieben werden.

◒ **12** Wie hoch wird der Erdhügel?

● **13** Der Erdhügel muss komplett aufgeschüttet werden. Um ihm die nötige Stabilität zu geben, muss er an seinem Fuß (auf der x_1x_2-Ebene) mindestens eine Breite von 8 Metern haben. Berechnen Sie die Menge (das Volumen) an Erde, welches aufgeschüttet werden muss.

Lernvoraussetzungen	Eignung ab
■ Quadratische Funktionen ■ Funktionenscharen ■ Kettenregel ■ Vektorrechnung ■ Skalarprodukt ■ ggf. Vektorprodukt ■ Binomialverteilung ■ partielle Integration	Klassenstufen 11 bis 13

Neues vom Fußballplatz – Lösungen

1 $f_k(x_2) = -0{,}02 \cdot x_2^2 + k \cdot 0{,}55 \cdot x_2 - k \cdot 2{,}5;$

$f_k'(x_2) = -0{,}04 \cdot x_2 + 0{,}55 \cdot k$

Damit die Flughöhe des Balls an der Stelle 27,5 einen Extremwert annimmt, muss gelten:

$f_k'(27{,}5) = 0 = -0{,}04 \cdot 27{,}5 + 0{,}55 \cdot k$ und $f_k''(27{,}5) = -0{,}04 \neq 0$

Diese Bedingungen sind für $k = 2$ erfüllt.

Berechnung der maximalen Flughöhe des Balls: $f_2(27{,}5) = -0{,}02 \cdot 27{,}5^2 + 2 \cdot 0{,}55 \cdot 27{,}5 - 2 \cdot 2{,}5 = 10{,}125$

Die maximale Flughöhe liegt bei etwa 10,12 m.

2 Es handelt sich bei der Flugbahn um eine nach unten geöffnete Parabel. Gesucht sind die Nullstellen in der x_1x_2-Ebene. An den Nullstellen muss gelten $x_3 = 0$.

$$x_3: f_2(x_2) = 0 = -0{,}02 \cdot x_2^2 + 2 \cdot 0{,}55 \cdot x_2 - 2 \cdot 2{,}5 \qquad | :-0{,}02$$
$$= x_2^2 - 55 \cdot x_2 + 250$$

Anwenden der Lösungsformel für quadratische Gleichungen führt zu den beiden Nullstellen $x_{2(1)} = 5$ und $x_{2(2)} = 50$.

Aus dem Abschlagpunkt in der Tormitte folgt für die x_1-Koordinate $x_1 = 30$.

Der Abschlagpunkt hat also die Koordinaten $(30|5|0)$ und der Landepunkt die Koordinaten $(30|50|0)$. Der Landepunkt ist somit genau der Mittelpunkt (Anstoßpunkt) des Fußballplatzes.

3 Gesucht ist der Funktionswert an der Stelle $x_2 = 47$.

Für den Funktionswert an dieser Stelle gilt:

$x_3: f_2(47) = -0{,}02 \cdot 47^2 + 2 \cdot 0{,}55 \cdot 47 - 2 \cdot 2{,}5 = 2{,}52$

Der Ball hat an dieser Stelle eine Höhe von 2,52 m.

Da das Trainingstor nur eine Höhe von 2,44 m hat, wird der Ball über das Tor fliegen.

4 a) Da die Flugbahn eine Parabel in der x_2x_3-Ebene darstellt, lautet die Tangentengleichung allgemein $t: x_3 = m \cdot x_2 + b$

An der Stelle $x_2 = 50$ lautet die Tangentengleichung:

$x_3 = f_2'(50) \cdot x_2 + \left(f_2(50) - f_2'(50) \cdot 50\right) = -0{,}9 \cdot x_2 + 45$

Der Winkel der Tangenten zur x_1x_2-Ebene beträgt:
$\alpha = |\tan^{-1}(-0{,}9)| = |-41{,}98°|$, also $\alpha = 41{,}987°$

b) Im $\mathbb{R}^3$ kann die Tangente durch den Landepunkt aus Aufgabe 3 und die Tangentensteigung von $-0{,}9$ aus Aufgabe 4 a) dargestellt werden durch

$t\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix}$

Für die x_1x_2-Ebene gilt $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Daraus ergibt sich für den Winkel:

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \sin^{-1}\left(\frac{9}{181}\right) = 41{,}987°$$

5 Koordinaten des Tores:

A: $\left(30 - \frac{7{,}32}{2} \middle| 0 \middle| 0\right) = (26{,}34\,|0|\,0)$

B: $(26{,}34\,|0|\,2{,}44)$

C: $(33{,}66\,|0|\,2{,}44)$

D: $(33{,}66\,|0|\,0)$

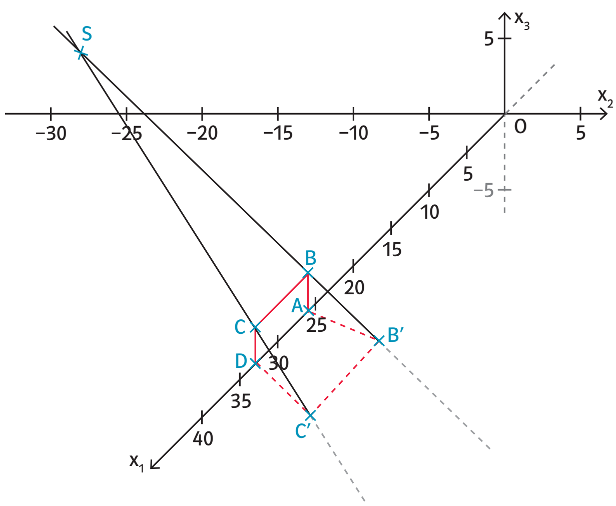
Durch die Punkte B bzw. C gehen die Sonnenstrahlen:

$g_{\text{Sonne B}}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 28 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1{,}66 \\ -15 \\ 7{,}56 \end{pmatrix}$ bzw. $g_{\text{Sonne C}}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 28 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -5{,}66 \\ -15 \\ 7{,}56 \end{pmatrix}$

Die Schattenpunkte der Torecken sind die Schnittpunkte der beiden Geraden (Sonnenstrahlen) mit der x_1x_2-Ebene $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Diese Punkte erhält man durch Lösen des LGS:
(I) $s = 28 + t_1 \cdot 1{,}66$
(II) $r = -15 + t_1 \cdot (-15)$
(III) $0 = 10 + t_1 \cdot 7{,}56$
(I) $s = 28 + t_2 \cdot (-5{,}66)$
(II) $r = -15 + t_2 \cdot (-15)$
(III) $0 = 10 + t_2 \cdot 7{,}56$

B′$(25{,}80\,|4{,}84|\,0)$
C′$(35{,}48\,|4{,}84|\,0)$
Den Schatten des Tores erhält man durch Verbinden der Punkte A, B′, C′ und D.



6 Da die x_2- und die x_3-Koordinaten der Torecken B und C gleich sind, verläuft die Querlatte parallel zur x_1-Achse.
Die x_2- und x_3-Koordinaten der Schattenpunkte B′ und C′ sind ebenfalls gleich. Also verläuft auch der Schatten der Querlatte parallel zur x_1-Achse und parallel zur Querlatte.

7 Die zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 33{,}66 - 26{,}34 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}32 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 33{,}66 - 33{,}66 \\ 0 - 0 \\ 2{,}44 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}44 \end{pmatrix}$ spannen das Tor auf.

Ihr Vektorprodukt lautet

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 7{,}32 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -17{,}8608 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Betrag dieses Normalenvektors auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ entspricht dem Flächeninhalt des Tores.

Alternative Berechnung:
Das Skalarprodukt der beiden Vektoren ist null, folglich sind die beiden Vektoren orthogonal zueinander. Das Tor stellt also ein Rechteck dar. Berchnung des Flächeninhalts des Rechecks mithilfe des Betrags der Vektoren: $7{,}32 \cdot 2{,}44 = 17{,}8608$

8 $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}4 = 40$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 4{,}89$

9 Gesucht: $P(28 \leqq X \leqq 50)$
Berechnung mithilfe der Binomialverteilung:

$F_{100;0{,}4}(50) - F_{100;0{,}4}(28) \approx 0{,}9832 - 0{,}0084 = 0{,}9748 = 97{,}48\,\%$

Näherungsweise Berechnung mithilfe der Normalverteilung:

$\approx \Phi\left(\frac{50{,}5 - 40}{4{,}89}\right) - \Phi\left(\frac{27{,}5 - 40}{4{,}89}\right) = \Phi(2{,}15) - \Phi(-2{,}56) \approx 0{,}9842 - 0{,}0052 = 0{,}979 = 97{,}9\,\%$

10 $(1 - 0{,}4)^n \leqq (1 - 0{,}99)$

$\Rightarrow 0{,}6^n \leqq 0{,}01$

$\Rightarrow n \cdot \log(0{,}6) \leqq \log(0{,}01)$

$\Rightarrow n \geqq \frac{\log(0{,}01)}{\log(0{,}6)} = 9{,}01$ $\quad\Rightarrow$ Er muss mindestens 10 Bälle schießen

11 $P(X = 34) = \binom{100}{34} \cdot 0{,}4^{34} \cdot 0{,}6^{66} \approx 0{,}039 = 3{,}9\,\%$

Näherungslösung mithilfe der Normalverteilung:

$P(X = 34) \approx \frac{1}{4{,}89\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(34 - 40)^2}{2 \cdot 4{,}89^2}} \approx 0{,}038 = 3{,}8\,\%$

12 Nullstelle der 1. Ableitung berechnen:

$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{(-x + 3)} + \frac{1}{2} \cdot e^{(-x + 3)} = -\frac{1}{2}e^{(-x + 3)}(x - 1) = 0$

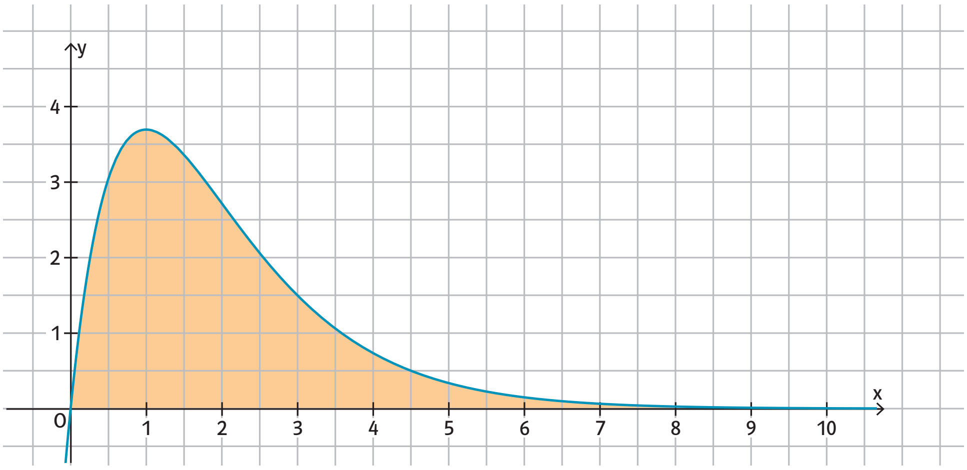
$\Leftrightarrow x = 1$

$f''(x) = \frac{1}{2}e^{(-x + 3)}(x - 2);\;\; f''(1) < 0$

Einsetzen in Funktion: $f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^{(-1 + 3)} = 3{,}6945$

Die Tribüne (der Erdhügel) wird 3,69 Meter hoch.

13 Für die Querschnittsfläche ist das Integral mit den Integralgrenzen 0 und 8 zu bestimmen. Dies geschieht mithilfe einer partiellen Integration.



$$\int_0^8 \frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{(-x+3)}\,dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{(-x+3)} - \frac{1}{2} \cdot e^{(-x+3)}\right]_0^8 = 10{,}01244$$

Somit muss ein Volumen von
$V = 10{,}01244\,m^2 \cdot 100\,m = 1001{,}244\,m^3$ aufgeschüttet werden.