Geschickte Summation

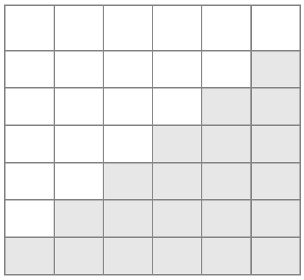
Im Februar 1855, also vor 160 Jahren, ist der große Mathematiker Carl Friedrich Gauss verstorben. Schon als kleiner Knabe soll Carl Friedrich seinen Lehrer verblüfft haben, weil er unglaublich schnell und praktisch ohne große Rechnung die Summe der ersten hundert natürlichen Zahlen berechnet hat:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 = 5050$

Sein Ergebnis soll als einziges in der Klasse richtig gewesen sein! Carl Friedrich hatte einen einfachen, aber raffinierten Trick verwendet. Mit Hilfe dieses Tricks kannst du diese und noch viel schwierigere Summen ebenfalls ganz schnell ermitteln.

Aufgaben

◒ **1** a) Die Abbildung zeigt, wie man rasch die Summe der ersten sechs natürlichen Zahlen berechnen kann.
Es gilt: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = (6 \cdot 7) : 2 = 21$
Berechne entsprechend die Summen
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 18 + 19 + 20$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 48 + 49 + 50$
b) Beschreibe mit eigenen Worten, wie du bei der Berechnung der Summen aus Teilaufgabe a) vorgegangen bist.
c) Gib einen Term für die Summe $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n$ an.
d) Moritz behauptet: „Die Summe $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n$ ist für keine natürliche Zahl n eine gerade Zahl.“ Was meinst du?



● **2** a) Die nebenstehende Abbildung zeigt eine andere Darstellung der obigen Idee zur Berechnung solcher Summen.
Verstehst du die Vorgehensweise? Formuliere sie mit deinen eigenen Worten.
Die Summe der ersten sechs natürlichen Zahlen ist also $(6 \cdot 7) : 2 = 21$.
b) Wie kannst du die Summe $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 18 + 19 + 20 + 21$ mit dieser Methode berechnen?
c) Berechne die Summe der ersten 1001 natürlichen Zahlen.

+1	+2	+3	+4	+5	+6
+6	+5	+4	+3	+2	+1
7	7	7	7	7	7

● **3** Verwende die bisherigen Erfahrungen, um die folgenden Summen zu berechnen.
a) $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$
b) $31 + 32 + 33 + 34 + \ldots + 47 + 48 + 49 + 50$
c) $100 + 101 + 102 + \ldots + 198 + 199 + 200$
d) $87 + 88 + 89 + \ldots + 211 + 212 + 213$

● **4** Entwickle Methoden zur Berechnung der folgenden Summen.
a) $2 + 4 + 6 + \ldots + 96 + 98 + 100$
b) $3 + 6 + 9 + \ldots + 393 + 396 + 399$
c) $100 - 99 + 98 - 97 + \ldots + 4 - 3 + 2 - 1$
d) $88 - 86 + 84 - 82 + \ldots + 4 - 2$
e) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots + 97 - 98 + 99 - 100$

Niveaustufen: ○ leicht ◒ mittel ● schwer

Bildquelle:
Deutsche Bundesbank

Lernvoraussetzungen	Eignung ab
■ Grundrechenarten ■ Assoziativgesetz und Kommutativgesetz der Addition ■ Distributivgesetz ■ Rechnen mit negativen Zahlen ■ Aufstellen einfacher Terme ■ Interpretieren einfacher Terme	Klassenstufe 6

Geschickte Summation – Lösungen

1 a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 18 + 19 + 20 = (20 \cdot 21) : 2 = 210$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 48 + 49 + 50 = (50 \cdot 51) : 2 = 1275$
b) Man multipliziert die Anzahl der Summanden mit der um 1 größeren Zahl und halbiert das Ergebnis.
c) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n = \big(n \cdot (n + 1)\big) : 2$
d) Moritz hat nicht recht! Bereits die erste Summe in a) ist ein geeignetes Gegenbeispiel.

2 a) Die natürlichen Zahlen von 1 bis 6 werden nebeneinander geschrieben und in umgekehrter Reihenfolge nochmals darunter. Die beiden untereinander stehenden Zahlen addieren sich immer zu 7. Insgesamt haben die beiden Zahlenreihen zusammen also den Wert $6 \cdot 7$. Jede der beiden Zahlenreihen hat daher die Hälfte dieses Wertes als Summe. Dies ergibt 21.
b) Schreibt man die beiden Zahlenreihen aus jeweils 21 Summanden untereinander wie in a), so ergibt sich immer die Summe 22. Insgesamt haben die beiden Zahlenreihen daher den Wert $21 \cdot 22$. Die gesuchte Summe ist halb so groß und demnach 231.
c) Es gilt: Aus $1 + 2 + 3 + \ldots + 999 + 1000 + 1001$ ergibt sich $(1001 \cdot 1002) : 2 = 501\,501$.

3 a) Man berechnet die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 20 und subtrahiert die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 10. Dies ergibt:
$11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$
$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 18 + 19 + 20) - (1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9 + 10)$
$= (20 \cdot 21) : 2 - (10 \cdot 11) : 2$
$= 210 - 55$
$= 155$
b) Entsprechend erhält man:
$31 + 32 + 33 + 34 + \ldots + 47 + 48 + 49 + 50$
$= (1 + 2 + \ldots + 49 + 50) - (1 + 2 + \ldots + 29 + 30)$
$= (50 \cdot 51) : 2 - (30 \cdot 31) : 2$
$= 1275 - 465$
$= 810$
c) Hier ergibt sich:
$100 + 101 + 102 + \ldots + 198 + 199 + 200$
$= (200 \cdot 201) : 2 - (99 \cdot 100) : 2$
$= 20\,100 - 4950$
$= 15\,150$

d) Es gilt:
$87 + 88 + 89 + \dots 211 + 212 + 213$
$= (1 + 2 + \dots 212 + 213) - (1 + 2 + \dots 85 + 86)$
$= (213 \cdot 214) : 2 - (86 \cdot 87) : 2$
$22791 - 3741$
$= 19050$

4 a) Ausklammern des Faktors 2 führt das Problem auf ein bekanntes Problem zurück!
$2 + 4 + 6 + \dots + 96 + 98 + 100$
$= 2 \cdot (1 + 2 + \dots 49 + 50)$
$= 2 \cdot \big((50 \cdot 51) : 2\big)$
$= 2550$
b) Ausklammern von 3 ergibt:
$3 + 6 + 9 + \dots + 393 + 396 + 399$
$= 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots 131 + 132 + 133)$
$= 3 \cdot \big((133 \cdot 134) : 2\big)$
$= 26733$
c) Hier hilft eine neue Idee:
Fasse benachbarte Summanden zusammen. Es ergibt sich jedes Mal 1. Die Summe ist daher 50.
d) Die Differenz benachbarter Summanden ist 2. Es handelt sich um 22 solcher Zahlenpaare. Die Summe ist daher 44.
e) Je zwei benachbarte Summanden addieren sich zu -1. Die Summe ist daher -50.