Lauter Quadrate

Du weißt, dass man beispielsweise 9, 25 oder 121 Quadratzahlen nennt. Wahrscheinlich kennst du die Quadratzahlen bis $625 = 25 \cdot 25$ sogar auswendig. Das kann für das folgende Spiel eine große Hilfe sein. Beim Betrachten der natürlichen Zahlen bemerkt man, dass manche sich als Summe von zwei Quadratzahlen schreiben lassen: $17 = 4 \cdot 4 + 1 \cdot 1$, $50 = 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5$. Für andere Zahlen braucht man bereits drei Quadratzahlen: $30 = 5 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1$, $74 = 7 \cdot 7 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3$. Schließlich gibt es auch Zahlen, für deren Darstellung man vier Quadratzahlen benötigt: $31 = 5 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$,
$183 = 13 \cdot 13 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1$.
Joseph Louis Lagrange hat im Jahre 1770 das erstaunliche Ergebnis bewiesen, dass man für *keine* natürliche Zahl mehr als vier Quadratzahlen braucht!
Um die Darstellung von Zahlen als Summe von Quadratzahlen geht es in diesem Spiel, das hier zunächst für *drei* Personen beschrieben wird, sich aber leicht auch zu zweien oder alleine spielen lässt.

Vorbereitung

Aus einem gewöhnlichen Kartenspiel entnehmt ihr jeweils drei Karten mit den Werten Ass (für 1), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und König (für 0). Mit diesen 30 Karten wird gespielt. Der Rest wird weggelegt. Jeder Spieler benötigt Papier und Schreibzeug, sonst nichts (insbesondere also keinen Taschenrechner!).

Durchführung

Die Karten werden gemischt. Aus dem Stapel zieht jeder der drei Spieler eine Karte. Die drei Karten stehen für die Hunderterziffer, Zehnerziffer und Einerziffer einer dreistelligen Zahl. Wegen des Königs kann die Hunderterziffer durchaus auch mal 0 sein. In diesem Fall ist die Zahl eben nur zweistellig.
Wenn die Karten auf dem Tisch liegen, schreibt jeder Spieler die sechs dreistelligen Zahlen auf sein Papier, die man mit diesen drei Ziffern bilden kann. Hat man beispielsweise die Ziffern 1, 4 und 9 gezogen, so notiert man neben 149 auch 194, 419, 491, 914 und 941.
Jetzt versucht jeder Spieler für sich und ohne Einblick der anderen Spieler in die eigenen Notizen, jede dieser sechs Zahlen als Summe von Quadratzahlen darzustellen. Manchmal werden zwei, gelegentlich drei, nicht selten aber auch vier Quadratzahlen zur Darstellung erforderlich sein.
Wer zuerst alle Darstellungen notiert hat, ist Sieger, wenn die Mitspieler überprüft haben, dass alle Rechnungen korrekt sind. Anderenfalls gewinnt derjenige der beiden anderen Spieler, der bis dahin die meisten korrekten Darstellungen gefunden hat.

Beispiel

Angenommen die Ziffern 2, 3 und 6 wurden durch Ziehen der Spielkarten ausgewählt. Dann sollte der Sieger am schnellsten die folgenden Darstellungen gefunden haben:
$236 = 196 + 36 + 4 = 14 \cdot 14 + 6 \cdot 6 + 2 \cdot 2$
$263 = 225 + 36 + 1 + 1 = 15 \cdot 15 + 6 \cdot 6 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$
$326 = 324 + 1 + 1 = 18 \cdot 18 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$
$362 = 324 + 36 + 1 + 1 = 18 \cdot 18 + 6 \cdot 6 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$
$623 = 529 + 81 + 9 + 4 = 23 \cdot 23 + 9 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2$
$632 = 576 + 36 + 16 + 4 = 24 \cdot 24 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2$

Und nun: Viel Spaß!

Lernvoraussetzungen	Eignung ab
▪ Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum bis 1000 ▪ Quadratzahl	Klassenstufe 5

Lauter Quadrate – Hinweise

Zum Spiel

Wer sich mit seiner Klasse nicht sofort an das Spiel mit dreistelligen Zahlen traut, der möge es zunächst in Zweiergruppen mit zweistelligen Zahlen trainieren lassen. Spannender wird es allerdings, wenn man zu dreistelligen Zahlen übergeht. Man hat dann ein organisatorisch einfaches Kopfrechenspiel zum Lernen und Behalten der Quadratzahlen, zum Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum bis 1000.
Natürlich kann das Spiel (eher außerhalb des Unterrichts) auch alleine gespielt werden. Der Lehrer kann z.B. als Tipp für langweilige Autobahnfahrten empfehlen: Zerlegt die Zahlen auf den Nummernschildern vorbeikommender Fahrzeuge im Kopf in eine Summe von Quadratzahlen.
Hinweis: Die Zerlegungen sind nicht immer eindeutig!
Beispiele: $43 = 5^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2 = 5^2 + 3^2 + 3^2$; $25 = 5^2 = 4^2 + 3^2 = 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$

Zur Theorie

Darstellbarkeit einer natürlichen Zahl als Summe von zwei Quadratzahlen

Satz

Eine natürliche Zahl n ist genau dann als Summe von zwei Quadraten darstellbar, wenn in der Primfaktorzerlegung von n alle Primfaktoren p, für die $p \equiv 3 \bmod 4$ gilt, in gerader Vielfachheit vorkommen.
Beispiel:
$242 = 2 \cdot 11 \cdot 11$; $11 \equiv 3 \bmod 4$ und kommt zweifach als Primfaktor vor.
Daher lässt sich 242 als Summe von zwei Quadraten schreiben: $242 = 11^2 + 11^2$
$65 = 5 \cdot 13$; es gibt keinen Primfaktor p, $p \equiv 3 \bmod 4$. Daher lässt sich 65 als Summe von zwei Quadraten schreiben: $65 = 8^2 + 1^2$
Gegenbeispiel:
$154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$; $7 \equiv 3 \bmod 4$. $11 \equiv 3 \bmod 4$, jede dieser Primzahlen kommt nur einmal, also in ungerader Vielfachheit vor. 154 lässt sich daher nicht als Summe von zwei Quadraten schreiben.

Darstellbarkeit einer natürlichen Zahl als Summe von drei Quadratzahlen

Satz (Gauß)

Eine natürliche Zahl n ist genau dann als Summe von drei Quadratzahlen darstellbar, wenn sich n in der Form $n = 4^k \cdot m$ schreiben lässt, 4 kein Teiler ist von m und $m \not\equiv 7 \bmod 8$.
Beispiel:
$96 = 4^2 \cdot 6$; 4 ist kein Teiler von 6; $6 \not\equiv 7 \bmod 8$. Daher lässt sich 96 als Summe von drei Quadraten schreiben: $96 = 64 + 16 + 16 = 8^2 + 4^2 + 4^2$
Gegenbeispiel:
$112 = 4^2 \cdot 7$; 4 ist kein Teiler von 7, aber $7 \equiv 7 \bmod 8$. 112 lässt sich daher nicht als Summe von drei Quadraten schreiben.

Darstellbarkeit einer natürlichen Zahl als Summe von vier Quadratzahlen

Satz (Lagrange)

Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von höchstens vier Quadratzahlen schreiben.