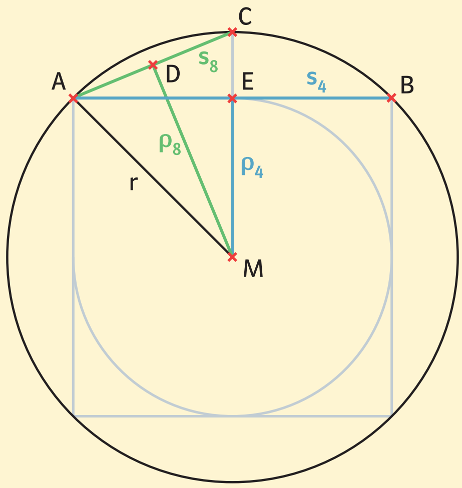
Pi-Day

Näherungsweise Berechnung der Zahl π nach Archimedes
Idee: Man beschreibt einem Kreis mit dem Radius r zunächst ein Quadrat (regelmäßiges Viereck) ein. Die Seitenlänge AB dieses Vierecks wird mit s_4 bezeichnet. Mit dem Satz des Pythagoras ist s_4 und damit der Umfang u_4 berechenbar. Die Mittelsenkrechte zu AB schneidet den Kreis in C. Dann ist die Strecke AC die Seite eines regelmäßigen Achtecks, das diesem Kreis einbeschrieben ist. Damit kann man u_8 berechnen.
Fortsetzen dieses Verfahrens führt zu u_{16}, u_{32} usw. und damit zu einer immer besseren Annäherung an den Kreis von innen.
Hinweis:
Rechne immer exakt und nicht mit Näherungswerten!



Aufgaben

● **1** a) Berechne für den Kreis mit dem Radius r die Seitenlänge s_4 . Gib den Radius ρ_4 des Inkreises des regelmäßigen Vierecks an.
b) Mit Hilfe von s_4 und ρ_4 lässt sich im Dreieck AEC die Seitenlänge s_8 berechnen.

Bestätige: $s_8 = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$
c) Im Dreieck AMD kann der Inkreisradius ρ_8 des regelmäßigen Achtecks ermittelt werden.
Berechne ρ_8.
d) Bestimme damit die Seitenlänge s_{16} des regelmäßigen 16-Ecks.
e) Vermutlich erkennst du jetzt bereits ein Muster, wie die Terme für die Seitenlängen des 32-Ecks, des 64-Ecks, des 128-Ecks usw. aussehen. Gib diese Terme an.
f) Schreibe nun die Näherungswerte für die Umfänge der regelmäßigen n-Ecke auf. Gegen welchen Wert scheinen diese Umfänge zu streben?

● **2** a) Zeige allgemein: Die Seitenlänge des einem Kreis mit dem Radius r einbeschriebenen 2n-Ecks lässt sich aus der Seitenlänge des n-Ecks wie folgt berechnen:

$s_{2n}^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_n^2}$

b) Verwende diese Beziehung zur Bestimmung der Umfänge u_{12}, u_{24}, u_{48} der einbeschriebenen regelmäßigen Vielecke mit 12, 24 und 48 Seiten.

● **3** a) Beweise: Der Flächeninhalt A_n eines regelmäßigen n-Ecks, das einem Kreis mit dem Radius r einbeschrieben ist und das den Inkreisradius ρ_n und die Seitenlänge s_n hat, lässt sich mit der Formel

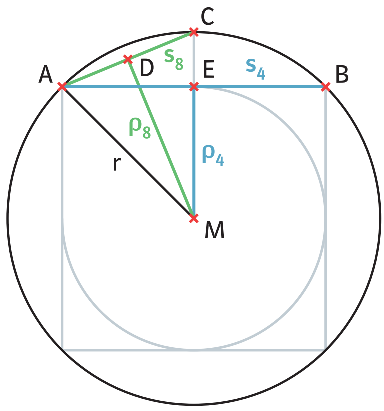
$A_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \rho_n \cdot s_n$ berechnen.

b) Inwiefern ergibt sich aus diesem Ergebnis eine weitere Möglichkeit zur näherungsweisen Bestimmung von π?

Niveaustufen: ○ leicht ◒ mittel ● schwer

Lernvoraussetzungen	Eignung ab
■ Satz des Pythagoras ■ Sicherer Umgang mit Quadratwurzelausdrücken	Klassenstufe 8/9

Pi-Day – Lösungen



1 a) Mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck AMB folgt
$s_4^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$, daher $s_4 = r\sqrt{2}$.

Ferner: $\rho_4 = \frac{1}{2}s_4 = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$

b) Mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck AEC erhält man:

$s_8^2 = \left(\frac{1}{2}s_4^2\right)^2 + (r - \rho_4)^2$

Einsetzen von s_4 und ρ_4 und Vereinfachung des Terms ergibt:

$s_8^2 = r^2 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)$

Wurzelziehen führt auf $s_8 = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ wie behauptet.

c) Mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck AMD folgt:

$\rho_8^2 = r^2 - \left(\frac{1}{2}s_8\right)^2$

Einsetzen von s_8, Termvereinfachung und Wurzelziehen liefert:

$\rho_8 = \frac{1}{2}r\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

d) Mit einer entsprechenden Zeichnung wie oben ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras:

$s_{16}^2 = \left(\frac{1}{2}s_8^2\right)^2 + (r - \rho_8)^2$

Einsetzen von s_8 und ρ_8, Termvereinfachung durch geduldiges Rechnen und Wurzelziehen ergibt:

$s_{16} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

e) Es ist zu erwarten: $s_{32} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$, $s_{64} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$,

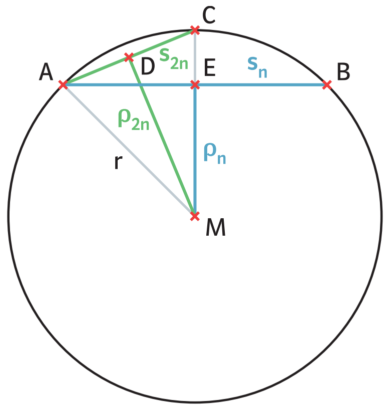
$s_{128} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}$

f) Umfänge der n-Ecke:

$u_4 = 4 \cdot s_4 = 4 \cdot r\sqrt{2}$	≈ 5,65685425 r
$u_8 = 8 \cdot s_8 = 8 \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	≈ 6,12293492 r
$u_{16} = 16 \cdot s_{16} = 16 \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$	≈ 6,24289031 r
$u_{32} = 32 \cdot s_{32} = 32 \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$	≈ 6,27309698 r
$u_{64} = 64 \cdot s_{64} = 64 \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$	≈ 6,28066233 r
$u_{128} = 128 \cdot s_{128} = 128 \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}$	≈ 6,28255465 r

Man erkennt, dass diese Umfänge bei immer größer werdender Seitenzahl gegen $2 \cdot \pi \cdot r$ (≈ 6,2831531 r) zu streben scheinen.

2 a) Die Skizze stellt den Übergang vom n-Eck zum 2n-Eck dar.
Wie in Aufgabe 1 erhält man mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck



AME: $\left(\frac{1}{2}s_n\right)^2 = r^2 - \rho_n^2$,

Daraus folgt $\rho_n^2 = r^2 - \left(\frac{1}{2}s_n\right)^2$

Im Dreieck AEC ergibt sich:

$s_{2n}^2 = \left(\frac{1}{2}s_n\right)^2 + (r - \rho_n)^2$

Umformung der rechten Seite und Einsetzen von ρ_n:

$s_{2n}^2 = \frac{1}{4}s_n^2 + r^2 - 2r\rho_n + \rho_n^2$

$s_{2n}^2 = \frac{1}{4}s_n^2 + r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2} + r^2 - \frac{1}{4}s_n^2$

$s_{2n}^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2}$

$s_{2n}^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_n^2}$

b) Beim regelmäßigen Sechseck gilt: $s_6 = r$
Mit der Formel aus 2a) folgt dann:

$s_{12}^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - r^2} = 2r^2 - r^2\sqrt{3} = r^2 \cdot (2 - \sqrt{3})$

$s_{12} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $u_{12} = 12 \cdot r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

$s_{24}^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - r^2(2 - \sqrt{3})} = 2r^2 - r^2\sqrt{2 + \sqrt{3}} = r^2 \cdot \left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)$

$s_{24} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$, $u_{24} = 24 \cdot r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

$s_{48}^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - r^2\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)} = 2r^2 - r^2\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = r^2 \cdot \left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right)$

$s_{48} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$, $u_{48} = 48 \cdot r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$

3 a) Das Dreieck AMB in obiger Skizze hat den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}s_n \cdot \rho_n$. Beim regelmäßigen n-Eck gibt es n dieser Dreiecke. Damit ist der gesamte Flächeninhalt des n-Ecks zu berechnen mit $n \cdot A$. Dies ergibt die Behauptung.
b) Mit zunehmender Eckenzahl schöpfen die n-Ecke die Kreisfläche immer mehr aus. Berechnet man nun bei Kenntnis der Werte s_n und ρ_n die Flächeninhalte A_n und lässt n immer größer werden, so streben diese Inhalte gegen den Kreisflächeninhalt. Bekanntlich hat ein Kreis mit dem Radius r den Flächeninhalt $\pi \cdot r^2$. Damit ergeben sich mit wachsendem n sukzessive immer bessere Näherungwerte für π.