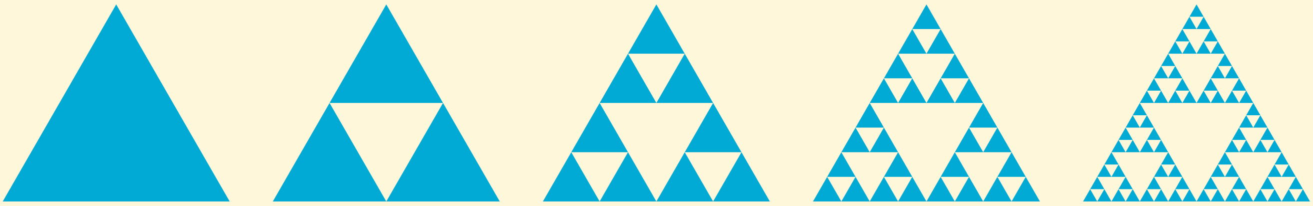
Sierpinski-Teppiche

Das Sierpinski-Dreieck



Stufe 0 Stufe 1 Stufe 2 Stufe 3 Stufe 4

Aufgaben

● 1 Die Abbildungsfolge zeigt durch Wegnehmen von Teilflächen die Veränderung des schwarzen Ausgangsdreiecks (Stufe 0). Auf diese Weise entsteht ein immer filigraneres Gebilde.
a) Ergänze die Tabelle durch Abzählen der schwarzen Dreiecke für die Stufen 0 bis 4.
Mache dann eine Vorhersage für die Anzahl der schwarzen Dreiecke für die Stufe 5.
Gib aufgrund dieser Beobachtungen einen Term an, mit dem sich die Anzahl der schwarzen Dreiecke für die Stufe n, $n \in \mathbb{N}$, machen lässt.
Begründe die Richtigkeit dieses Terms.

Stufe	0	1	2	3	4	5	n
Anzahl							

b) Wie viele Dreiecke gibt es in der Figur mit Stufe 10?
Auf welcher Stufe wird man erstmals mehr als eine Milliarde Dreiecke finden?
c) Im bekannten Universum gibt es weniger als 10^{90} Teilchen.
Auf welcher Stufe gibt es erstmals mehr Dreiecke als Teilchen im Universum?

● 2 Der Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks betrage A.
a) Bestimme die Flächeninhalte der schwarzen Flächen für die Stufen 1 bis 4, mache eine Vorhersage für den Term für Stufe n und begründe diese Vorhersage.

Stufe	0	1	2	3	4	5	n
Flächeninhalt	A						

b) Berechne den Flächeninhalt in der Figur mit Stufe 20.
Auf welcher Stufe wird der Flächeninhalt erstmals kleiner als 0,000 001 A?

Der Sierpinski-Teppich

Stufe 0 Stufe 1 Stufe 2 Stufe 3

● 3 Stelle dir entsprechende Fragen wie in den Aufgaben 1 und 2 und beantworte diese!

Niveaustufen: ○ leicht ◒ mittel ● schwer

Lernvoraussetzungen	Eignung ab
Potenzschreibweise Aufstellen von Termen Umgang mit dem Taschenrechner	Klassenstufe 8/9

Sierpinski-Teppiche – Lösungen

Das Sierpinski-Dreieck

1 a)

Stufe	0	1	2	3	4	5	n
Anzahl	1	3	9	27	81	243	3^n

Von einer Stufe zur nächsten wird die Anzahl der schwarzen Dreiecke dreimal so groß, da aus jedem schwarzen Dreieck durch Herausnehmen des Mittendreiecks drei kleinere schwarze Dreiecke entstehen.
b) Die Anzahl der schwarzen Dreiecke auf Stufe 10 ist $3^{10} = 59\,049$.
Mehr als eine Milliarde Dreiecke hat man, wenn n die Bedingung $3^n > 1\,000\,000\,000$ erfüllt.
Diese Anzahl kann man mit dem Taschenrechner (z. B. x^y-Taste) durch Probieren finden: 3^{20} ist zu groß, $3^{19} = 1\,162\,621\,467$ liegt erstmals über einer Milliarde. Wer mit Logarithmen umgehen kann, rechnet folgendermaßen:
$3^n > 1\,000\,000\,000$, daher $n \cdot \log_{10}(3) > \log_{10}(10^9) = 9$, $n > \frac{9}{\log_{10}(3)} \approx 18{,}86$, $n = 19$
c) Probieren oder Logarithmieren ergibt $n = 189$.

2 a)

Stufe	0	1	2	3	4	5	n
Flächeninhalt	A	$\frac{3}{4}A$	$\frac{9}{16}A$	$\frac{27}{64}A$	$\frac{81}{256}A$	$\frac{243}{1024}A$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot A$

Aus jedem schwarzen Dreieck wird das Mittendreieck entfernt. Es hat ein Viertel des Flächeninhalts des zugehörigen größeren Dreiecks. Daher wird bei jeder Stufe der Flächeninhalt der schwarzen Figur auf drei Viertel des vorherigen abnehmen.
b) Die Figur auf Stufe 20 hat den Flächeninhalt $\left(\frac{3}{4}\right)^{20} \cdot A \approx 0{,}0031712 \cdot A$.
Der Flächeninhalt wird für die Stufe 49 erstmals kleiner als $0{,}000\,001\,A$, nämlich ungefähr $0{,}000\,000\,755\,096\,A$.

Der Sierpinski-Teppich

3 (1)

a)

Stufe	0	1	2	3	4	5	n
Anzahl	1	8	64	512	4096	32768	8^n

b) Auf Stufe 10 gibt es $8^{10} = 1\,073\,741\,824$ schwarze Quadrate. Auf dieser Stufe wird auch erstmals eine Milliarde überschritten.

c) 8^{100} überschreitet 10^{90}.

(2)

a)

Stufe	0	1	2	3	4	5	n
Flächeninhalt	A	$\frac{8}{9}$A	$\frac{64}{81}$A	$\frac{512}{729}$A	$\frac{4096}{6561}$A	$\frac{32768}{59049}$A	$\left(\frac{8}{9}\right)^n \cdot A$

b) Die Figur auf Stufe 20 hat den Flächeninhalt $\left(\frac{8}{9}\right)^{20} \cdot A \approx 0{,}094\,830\,829 \cdot A$.
Auf Stufe 118 wird der Flächeninhalt erstmals kleiner als 0,000 001 A, nämlich ungefähr 0,000 000 920 455 A.