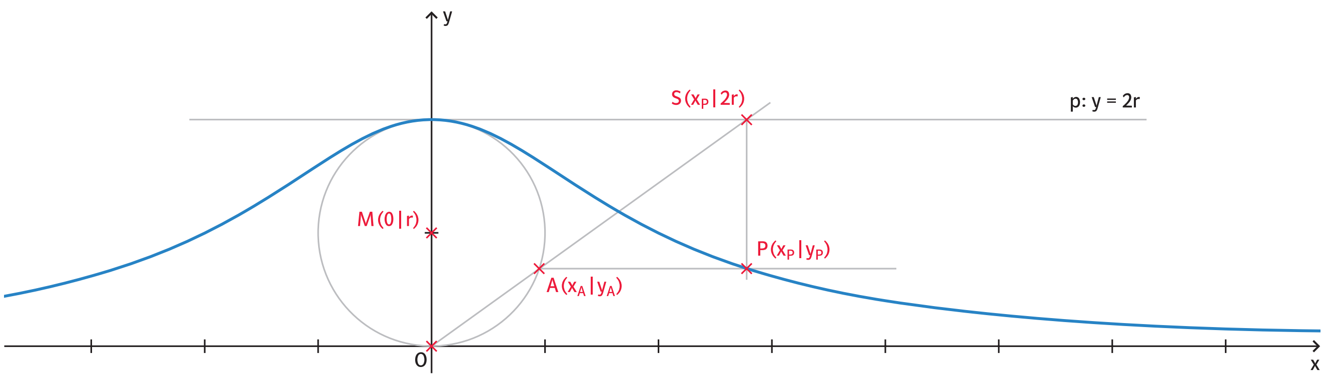
Die Versiera der Maria Agnesi

Maria Gaetana Agnesi (*16.5.1718 in Mailand, †9.1.1799 ebd.) war eine italienische Mathematikerin, die ursprünglich beabsichtigte, ins Kloster zu gehen, auf Wunsch ihres Vaters jedoch darauf verzichtete und sich ein Jahrzehnt lang der Mathematik widmete.
Im Jahr 1748 veröffentlichte sie ihr Buch
„Grundlagen der Analysis".
Nach ihr ist die im Folgenden angesprochene Kurve benannt.

Maria Gaetana Agnesi
*(*1718, † 1799)*



Aufgaben

○ 1 Erzeugung des Graphen

Die Abbildung zeigt, wie man die *Versiera* als Ortskurve nach folgender Vorschrift erzeugt.

1. Kreis um $M(0|r)$ mit dem Radius r
2. Parallele zur x-Achse durch den Punkt $(0|2r)$
3. Gerade durch O, die den Kreis in A und die Parallele in S schneidet
4. Parallele zur y-Achse durch S und Parallele zur x-Achse durch A
5. Schnittpunkt P dieser beiden Parallelen

Zeichnen Sie auf diese Weise die *Versiera* punktweise.

◒ 2 Herleitung der Gleichung des Graphen

Prüfen Sie die folgenden Schritte der Berechnung zur Bestimmung der Gleichung des Graphen nach.

1. Begründen Sie $\frac{2r}{y_A} = \frac{x_P}{x_A}$ und bestätigen Sie damit: $x_A^2 = \frac{y_A^2}{4r^2} \cdot x_P^2 = \frac{y_P^2}{4r^2} \cdot x_P^2$.

2. Der Kreis hat die Gleichung $x^2 + (y - r)^2 = r^2$. Der Punkt A liegt auf diesem Kreis.
Einsetzen seiner Koordinaten in die Kreisgleichung: $y_P \cdot \left[y_P \cdot (x_P^2 + 4r^2) - 8r^3\right] = 0$.

3. Dies gilt für alle Punkte P auf dem Graphen. Seine Gleichung lautet $y = \frac{8r^3}{x^2 + 4r^2}$.

Niveaustufen: ○ einfach ◒ mittel ● schwierig

Bildquelle: „PSM V53 D304 Maria Agnesi" by Unknown - Popular Science Monthly Volume 53. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PSM_V53_D304_Maria_Agnesi.jpg#/media/File:PSM_V53_D304_Maria_Agnesi.jpg

◒ **3 Bestimmung der Wendepunkte des Graphen**

a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion f mit $f(x) = \frac{8r^3}{x^2 + 4r^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Bestätigen Sie durch Rechnung: Der Graph von f hat die Wendepunkte

$W_1\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r \,\middle|\, \frac{3}{2}r\right)$ und $W_2\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r \,\middle|\, \frac{3}{2}r\right)$.

(Auf die hinreichende Bedingung darf verzichtet werden.)

c) Überprüfen Sie die Koordinaten von W_1 mithilfe eines Grafikrechners.

d) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt W_1.

● **4 Bestimmung des Inhalts A der Fläche zwischen Graph und x-Achse**

a) Bestimmen Sie mithilfe des Graphikrechners einen Näherungswert für A.

b) Einer Formelsammlung entnimmt man:

$$\int_a^b \frac{1}{x^2 + t^2}\,dx = \left[\frac{1}{t} \cdot \arctan\left(\frac{x}{t}\right)\right]_a^b, \quad t > 0,\ a \geqq 0,\ b > a$$

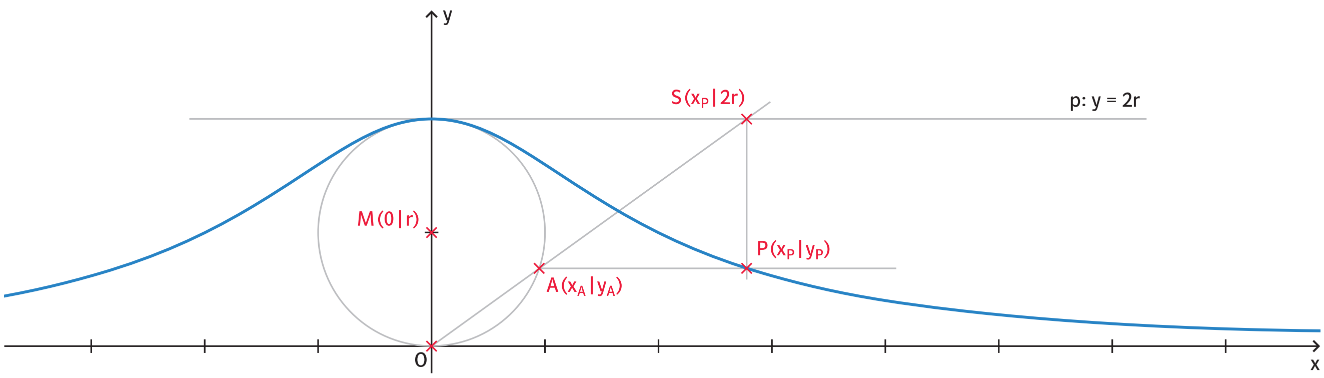
Weisen Sie damit nach, dass der Inhalt A genau viermal so groß ist wie der Flächeninhalt des zur Erzeugung gezeichneten Kreises mit dem Radius r.

Niveaustufen: ○ einfach ◒ mittel ● schwierig

Lernvoraussetzungen	Eignung ab
■ Flächeninhalt des Kreises ■ Strahlensätze ■ Quadratische Gleichung ■ Ortskurve ■ Ableitungsregeln ■ Tangentengleichung ■ Wendepunkt ■ Einsatz eines grafikfähigen Taschenrechners ■ Verwendung einer Formelsammlung	Klassenstufen 11 und 12

Die Versiera der Maria Agnesi – Lösungen

1 Erzeugung des Graphen



Wählt man beispielsweise $r = 1$, so kann man mit ein wenig Geduld etliche Punkte des Graphen im 1. Quadranten bestimmen. Die Punkte im zweiten Quadranten erhält man durch Spiegelung des bisher erzeugten Graphen an der y-Achse.

Anmerkungen
Mit einem Java-Applet lässt sich der Graph natürlich viel rascher erhalten.
Wenn man Aufgabe 2 gelöst hat, kann man den Graphen mit einem grafikfähigen Taschenrechner ebenfalls problemlos erzeugen.

2 Herleitung der Gleichung des Graphen

1. Zweiter Strahlensatz (Scheitel O):

$y_S : y_A = x_S : x_A$

$2r : y_A = x_P : x_A$

$x_A = \frac{y_A}{2r} \cdot x_P$

$x_A^2 = \frac{y_A^2}{4r^2} \cdot x_P^2$

$x_A^2 = \frac{y_P^2}{4r^2} \cdot x_P^2$

2. Einsetzen der Koordinaten von A:

$$x_A^2 + (y_A - r)^2 = r^2$$

$$\frac{y_P^2}{4r^2} \cdot x_P^2 + (y_P - r)^2 = r^2 \qquad | \cdot 4r^2$$

$$y_P^2 \cdot x_P^2 + 4r^2 \cdot \left(y_P^2 - 2y_P r + r^2\right) - 4r^4 = 0$$

$$y_P^2 \cdot x_P^2 + 4r^2 \cdot y_P^2 - 8r^3 y_P = 0$$

$$y_P \cdot \left[y_P \cdot (x_P^2 + 4r^2) - 8r^3\right] = 0$$

$$y_P \cdot (x_P^2 + 4r^2) - 8r^3 = 0 \quad \text{oder} \quad y_P = 0$$

3. Gleichung der Versiera lautet daher $y = \frac{8r^3}{x^2 + 4r^2}$.
Wenn A mit O zusammenfällt, dann ist die Konstruktion nicht ausführbar. Es gibt keinen Punkt des Graphen mit der y-Koordinate 0. Die Gleichung $y = 0$ kann als Gleichung der Asymptote (x-Achse) des Graphen gedeutet werden.

3 Bestimmung der Wendepunkte des Graphen

a) Aus $f(x) = \frac{8r^3}{x^2 + 4r^2} = 8r^3 \cdot (x^2 + 4r^2)^{-1}$ folgt mit der Faktorregel, der Summenregel, der Potenzregel, der Produktregel und der Kettenregel:

$f'(x) = 8r^3 \cdot \left[(-1) \cdot (x^2 + 4r^2)^{-2} \cdot 2x\right]$

$f'(x) = -16r^3 \cdot \left[(x^2 + 4r^2)^{-2} \cdot x\right]$

$f''(x) = -16r^3 \cdot \left[(-2) \cdot (x^2 + 4r^2)^{-3} \cdot 2x \cdot x + (x^2 + 4r^2)^{-2} \cdot 1\right]$

$f''(x) = -16r^3 \cdot \left[(-4x^2) \cdot (x^2 + 4r^2)^{-3} + (x^2 + 4r^2)^{-2} \cdot 1\right]$

b) Aus $f''(x) = 0$ folgt:

$$(-4x^2) \cdot (x^2 + 4r^2)^{-3} + (x^2 + 4r^2)^{-2} \cdot 1 = 0 \qquad | \cdot (x^2 + 4r^2)^3$$

$$-4x^2 + (x^2 + 4r^2) = 0$$

$$3x^2 = 4r^2$$

$$x_1 = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r, \quad x_2 = -\tfrac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r$$

Einsetzen der Werte in die Funktionsgleichung ergibt $y_1 = \frac{3}{2}r$, $y_2 = \frac{3}{2}r$.

Die Wendepunkte sind $W_1\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r \,\middle|\, \frac{3}{2}r\right)$ und $W_2\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r \,\middle|\, \frac{3}{2}r\right)$.

c) Der grafikfähige Taschenrechner liefert für $x > 0$ die Nullstelle der 2. Ableitung bzw. die Extremstelle der ersten Ableitung näherungsweise zu $x_1 \approx 1{,}1547 \cdot r$. Dies ist ein guter Näherungswert für $\frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r$.
Die y-Koordinate des Wendepunkts ergibt sich zu $y_1 = 1{,}5000 \cdot r$.

d) Für die Steigung m_1 des Graphen im Wendepunkt W_1 gilt:

$m_1 = f'(x_1)$

$m_1 = -16\,r^3 \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 \cdot r^2 + 4 \cdot r^2\right)^{-2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r$

$m_1 = -16\,r^3 \cdot \frac{1}{\left(\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 \cdot r^2 + 4 \cdot r^2\right)^2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r$

$m_1 = -16\,r^4 \cdot \frac{1 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}}{r^4 \cdot \left(\frac{4}{3} + 4\right)^2}$

$m_1 = -\frac{3}{8}\sqrt{3}$

Beachten Sie: Alle Wendetangenten haben unabhängig von dem bei der Erzeugung des Graphen verwendeten Kreisradius r die gleiche Steigung!

Gleichung der Tangente im Wendepunkt W_1:

$y = m_1 \cdot (x - x_1) + y_1$

$y = -\frac{3}{8}\sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot r\right) + \frac{3}{2}r$

$y = -\frac{3}{8}\sqrt{3} \cdot x + \frac{9}{4}r$

4 Bestimmung des Inhalts A der Fläche zwischen Graph und x-Achse

a) Wegen der Symmetrie der Fläche zur y-Achse genügt die Berechnung des Flächeninhalts im ersten Quadranten.
Als linke Intervallgrenze wird 0 angenommen. Die rechte Intervallgrenze wird durch die Rechengeschwindigkeit und Genauigkeit des Taschenrechners beschränkt. Lässt man den Graphen beispielsweise im Intervall [0;500] zeichnen und den Inhalt der Fläche berechnen, so dauert dies beispielsweise beim TI-83 Plus bereits etwa eine halbe Minute.
Man erhält den Näherungswert $6{,}2672 \cdot r^2$.
Die Gesamtfläche zwischen Graph und x-Achse ist doppelt so groß, hat also näherungsweise den Inhalt $12{,}53 \cdot r^2$.

b) Mit der Formel $\int_a^b \frac{1}{x^2 + t^2}\,dx = \left[\frac{1}{t} \cdot \arctan\left(\frac{x}{t}\right)\right]_a^b$ ergibt sich für $t = 2r$, $a = 0$:

$$8\,r^3 \cdot \int_0^b \frac{1}{x^2 + 4r^2}\,dx = 8\,r^3 \cdot \left[\frac{1}{2r} \cdot \arctan\left(\frac{x}{2r}\right)\right]_0^b$$

$$= 8\,r^3 \cdot \frac{1}{2r} \cdot \left[\arctan\left(\frac{b}{2r}\right) - \arctan\left(\frac{0}{2r}\right)\right]$$

$$= 4\,r^2 \cdot \arctan\left(\frac{b}{2r}\right)$$

Falls $b \to \infty$, dann $\arctan\left(\frac{b}{2r}\right) \to \frac{1}{2}\pi$.

Die Flächeninhaltsmaßzahl für die im 1. Quadranten liegende Fläche beträgt somit $2\pi r^2$, die Gesamtfläche zwischen dem Graphen und der x-Achse somit $4\pi r^2$. Dies war behauptet worden.