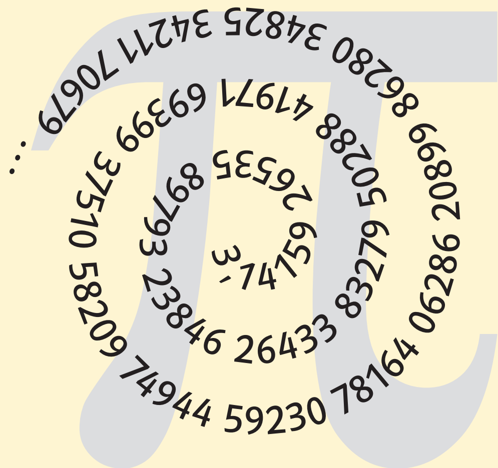
Ein paar Minuten mit π

Bekanntlich ist π eine unendliche nichtperiodische Dezimalzahl, von der hier die ersten 100 Nachkommastellen aufgeschrieben sind. Klar, wenn man Kreisumfänge genau berechnen will, braucht man halt viele Stellen von π! Aber ist das wirklich so? In der Praxis braucht kein Mensch jemals 100 oder mehr Nachkommastellen. Man kann zeigen, dass zur Berechnung des Umfangs eines beliebig großen Kreises auf der Erde mit einer Genauigkeit von einem Millimeter ein Näherungswert mit zehn Dezimalen locker ausreicht. Kann man sich eventuell einen Kreis im Universum denken, bei dem derart viele Stellen gebraucht würden?



Aufgabe

Prüfe alle Angaben in den mit Nummern versehenen Zeilen nach.

Nimm eine Kugel an, deren Radius gleich dem Abstand des Sterns Sirius von der Erde ist. Da Sirius etwa 8,75 Lichtjahre von uns entfernt ist und das Licht in einer Sekunde 300 000 Kilometer zurücklegt, ergibt das den Kugelradius:

(1) $r = 8{,}75 \cdot 86400 \cdot 365 \cdot 300\,000\,\text{km}$

Diese Streckenlänge kann man in wissenschaftlicher Schreibweise notieren und erhält:

(2) $r \approx 8{,}3 \cdot 10^{13}\,\text{km}$

Diese Kugel füllst du nun in Gedanken dicht mit Bakterien auf! Sagen wir: In einen Kubikmillimeter passen eine Billion Bakterien. Weil man das Volumen V einer Kugel mit der Formel $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ berechnet, erhält man:

(3) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 8{,}3^3 \cdot 10^{39}\,\text{km}^3$

(4) $V \approx 2{,}4 \cdot 10^{60}\,\text{mm}^3$

Für die Bakterienanzahl n in dieser Kugel ergibt sich:

(5) $n \approx 2{,}4 \cdot 10^{72}$

Diese Bakterien werden nun auf eine Schnur aufgefädelt gedacht, und zwar so, dass je zwei benachbarte Bakterien denselben Abstand voneinander haben wie Sirius von der Erde. Für die Schnurlänge folgt:

(6) $2 \cdot 10^{86}\,\text{km}$

Mit dieser Schnurlänge als Radius wird nun ein Kreis gedacht.

(7) Das bekannte Universum ist nicht groß genug für einen solchen Kreis!

Der exakte Umfang eines Kreises mit dem Radius R kann bekanntlich mit der Formel $U = 2 \cdot \pi \cdot R$ berechnet werden. Berechnet man nun den Kreisumfang einmal exakt mit π und einmal mit dem 100-stelligen Näherungswert von oben, so beträgt

(8) der Unterschied der beiden Werte weniger als ein zehnmillionstel Millimeter!

Ist jetzt klar, dass für keine praktischen Belange so viele Nachkommastellen von π eine Rolle spielen? Dass man dennoch π mittlerweile auf viele Milliarden Nachkommastellen berechnet hat, … aber das ist eine ganz andere Geschichte!

(nach H. Schubert: Mathematische Mußestunden, 2. Auflage, Leipzig 1900, Erster Band, Seite 39)

Ein paar Minuten mit π – Lösungen

Nimm eine Kugel an, deren Radius gleich dem Abstand des Sterns Sirius von der Erde ist. Da Sirius etwa 8,75 Lichtjahre von uns entfernt ist und das Licht in einer Sekunde 300 000 Kilometer zurücklegt, ergibt das den Kugelradius:

(1) $r = 8{,}75 \cdot 86\,400 \cdot 365 \cdot 300\,000\,\text{km}$

Ein Lichtjahr ist die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. Daher wird man zunächst die Anzahl der Sekunden bestimmen, die in einem Jahr verstreichen. Man erhält:

$1\,\text{min} = 60\,\text{s}; \quad 1\,\text{h} = 60\,\text{min} = 3600\,\text{s},\ 1\,\text{d} = 24\,\text{h} = 24 \cdot 3600\,\text{s} = 86\,400\,\text{s}$

Jedes Jahr zu 365 Tagen gerechnet ergibt $365 \cdot 86\,400\,\text{s}$, 8,75 Jahre demnach das 8,75-fache. Die Anzahl der Sekunden multipliziert mit der Strecke, die das Licht in einer Sekunde zurücklegt, ergibt den Ausdruck in (1).

Diese Streckenlänge kann man in wissenschaftlicher Schreibweise notieren und erhält:

(2) $r \approx 8{,}3 \cdot 10^{13}\,\text{km}$

Dieses Ergebnis erhält man unmittelbar durch Eintippen des obigen Produkts in einen Taschenrechner.

Diese Kugel füllst du nun in Gedanken dicht mit Bakterien auf! Sagen wir: In einen Kubikmillimeter passen eine Billion Bakterien. Weil man das Volumen V einer Kugel mit der Formel $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ berechnet, erhält man:

(3) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 8{,}3^3 \cdot 10^{39}\,\text{km}^3$

Für die Maßzahl von r^3 schreibt man ausführlich $8{,}3 \cdot 10^{13} \cdot 8{,}3 \cdot 10^{13} \cdot 8{,}3 \cdot 10^{13}$, was sich mit dem Kommutativgesetz der Multiplikation als $8{,}3 \cdot 8{,}3 \cdot 8{,}3 \cdot 10^{13} \cdot 10^{13} \cdot 10^{13}$ und einem Potenzsatz als $8{,}3^3 \cdot 10^{13 \cdot 3} = 8{,}3^3 \cdot 10^{39}$ schreiben lässt.

(4) $V \approx 2{,}4 \cdot 10^{60}\,\text{mm}^3$

Der Taschenrechner ergibt aus (3) zunächst: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 8{,}3^3 \cdot 10^{39}\,\text{km}^3 \approx 2400 \cdot 10^{39}\,\text{km}^3$
Nun gilt: $1\,\text{km} = 1000\,\text{m} = 1000 \cdot 1000\,\text{mm} = 10^6\,\text{mm}$, $1\,\text{km}^3 = (10^6\,\text{mm})^3 = 10^{18}\,\text{mm}^3$
Somit: $V \approx 2400 \cdot 10^{39} \cdot 10^{18} = 2{,}4 \cdot 10^3 \cdot 10^{39} \cdot 10^{18}\,\text{mm}^3 = 2{,}4 \cdot 10^{60}\,\text{mm}^3$

Für die Bakterienanzahl n in dieser Kugel ergibt sich:

(5) $n \approx 2{,}4 \cdot 10^{72}$

Eine Billion kann als 10^{12} geschrieben werden. Daraus erhält man die Bakterienanzahl zu $n \approx 2{,}4 \cdot 10^{60} \cdot 10^{12} = 2{,}4 \cdot 10^{72}$.

Diese Bakterien werden nun auf eine Schnur aufgefädelt gedacht, und zwar so, dass je zwei benachbarte Bakterien denselben Abstand voneinander haben wie Sirius von der Erde. Für die Schnurlänge folgt:

(6) $2{,}4 \cdot 10^{86}\,\text{km}$

Der Abstand des Sirius von der Sonne ist nach (2) etwa $8{,}3 \cdot 10^{13}\,\text{km}$. Die Länge der Schnur erhält man durch Multiplikation der Bakterienanzahl mit dem Abstand des Sirius von der Sonne. Dies ergibt: $2{,}4 \cdot 10^{72} \cdot 8{,}3 \cdot 10^{13}\,\text{km}$.
Der Taschenrechner liefert $2{,}4 \cdot 8{,}3 \approx 20$. Die Potenzen fasst man mit einem Potenzsatz zusammen und erhält 10^{85}. Insgesamt ergibt sich damit die Schnurlänge $20 \cdot 10^{85}\,\text{km} = 2 \cdot 10^{86}\,\text{km}$.

Mit dieser Schnurlänge als Radius wird nun ein Kreis gedacht.

(7) Das bekannte Universum ist nicht groß genug für einen solchen Kreis!

Bildquelle:
iStockphoto (Fotograf: mikkelwilliam); Calgary, Alberta.

Astronomen gehen von einem Radius des Universums von etwa 45 Milliarden Lichtjahren aus. Dies ergibt mit (1): $r = 45 \cdot 10^9 \cdot 86\,400 \cdot 365 \cdot 300\,000\,km \approx 4{,}3 \cdot 10^{23}\,km$. *Dieser Radius ist vernachlässigbar klein gegen die vorher berechnete Schnurlänge! Im gesamten Universum gibt es also keinen auch nur annähernd so großen Kreis.*
Achtung: 10^{86} *ist nicht ungefähr viermal so groß wie* 10^{23}. *Es ist* 10^{63}*-mal so groß!!!*

Der exakte Umfang eines Kreises mit dem Radius R kann bekanntlich mit der Formel $U = 2 \cdot \pi \cdot R$ berechnet werden. Berechnet man nun den Kreisumfang einmal exakt mit π und einmal mit dem 100-stelligen Näherungswert von oben, so beträgt

(8) der Unterschied der beiden Werte weniger als ein zehnmillionstel Millimeter!

Der Unterschied zwischen dem exakten Umfang U eines Kreises mit dem Radius R und dem Näherungswert U′ für diesen, der mit dem Näherungswert π′ von π auf 100 Dezimalen angegeben wird, lässt sich abschätzen. Es gilt:
$U - U' = 2 \cdot \pi \cdot R - 2 \cdot \pi' \cdot R = 2 \cdot R \cdot (\pi - \pi')$
Wird der Näherungswert π′ verwendet, so unterscheidet er sich vom wahren Wert π ab der 101. Dezimale, also um weniger als 10^{-100}. *Für den Umfangsunterschied kann man also behaupten:*

$$U - U' = 2 \cdot R \cdot (\pi - \pi') < 2 \cdot 2 \cdot 10^{86}\,km \cdot 10^{-100} = 4 \cdot 10^{92}\,mm \cdot 10^{-100} = 4 \cdot 10^{-8} < 10^{-7}\,mm$$

Dies ist weniger als ein zehnmillionstel Millimeter.

Lernvoraussetzungen	Eignung ab
■ Maßverwandlung bei Längen und Volumina ■ Wissenschaftliche Schreibweise ■ Anwenden von Formeln ■ Arbeiten mit Näherungswerten ■ Umgang mit dem Taschenrechner	Klassenstufe 8