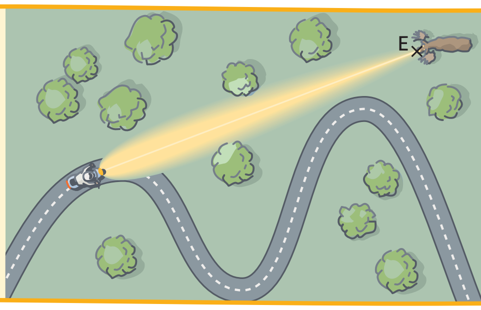
Tangente und Normale von außen

Anke fährt mit ihrem Motorrad bei Nacht auf einer kurvigen Straße. Abseits der Straße im Punkt E grast friedlich ein Elch.
Beschreiben Sie, in welchen Punkten der Straße die Scheinwerfer von Ankes Motorrad den Elch erfassen.



Bei der Bestimmung von Tangenten an den Graphen einer Funktion war der gegebene Punkt bisher stets auch der **Berührpunkt** selbst, also der Punkt, in dem die Tangente den Graphen berührt.
Für viele Anwendungsprobleme muss man jedoch Tangenten von einem Punkt E, der nicht auf dem Graphen liegt, an den Graphen legen (vgl. Fig. 1). Man spricht von der **Tangente von außen**. Man muss die Berührpunkte bestimmen (in Fig. 1 sind diese Punkte rot markiert).

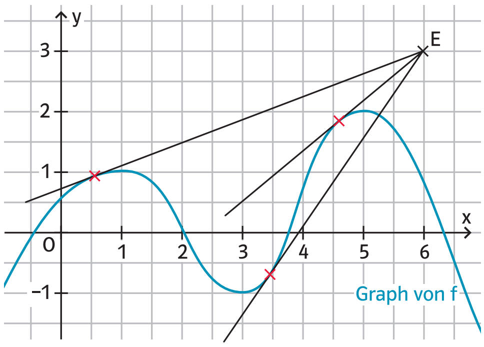


Fig. 1

Gegeben sind der Graph einer Funktion f und ein Punkt $A(a\,|\,b)$, der nicht auf dem Graphen liegt. Gesucht sind Gleichungen der Tangenten an den Graphen von f, die durch den Punkt A verlaufen. Gesucht sind außerdem die Koordinaten der Berührpunkte dieser Tangenten.

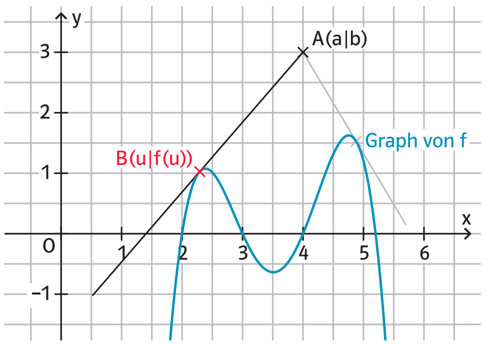


Fig. 2

Da ein Berührpunkt B auf dem Graphen von f liegt (Fig. 2), kann man seine Koordinaten in der Form $B(u\,|\,f(u))$ angeben. Die x-Koordinate u von B muss bestimmt werden.

Dabei geht man wie folgt vor:

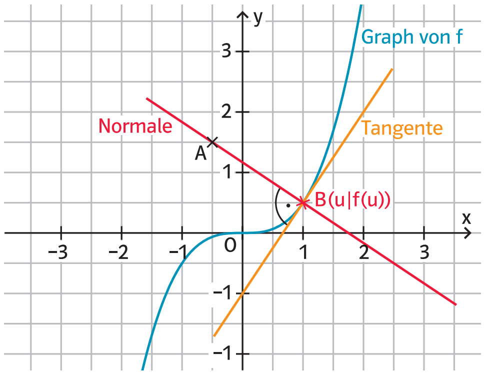
Tangente von außen

1. Schritt: Man leitet die Funktion f ab und bestimmt die Terme $f(u)$ und $f'(u)$.
2. Schritt: Man stellt die allgemeine Tangentengleichung im Punkt $B(u\,|\,f(u))$ auf. Sie lautet $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$.
3. Schritt: Der Punkt A muss auf dieser Tangente liegen. Man macht also die Punktprobe mit dem Punkt $A(a\,|\,b)$. Dazu setzt man in der Tangentengleichung für x die Koordinate a und für y die Koordinate b ein. Man erhält die Gleichung $b = f'(u) \cdot (a - u) + f(u)$.
4. Schritt: Da $A(a\,|\,b)$ gegeben ist, ist in $b = f'(u) \cdot (a - u) + f(u)$ nur noch u unbekannt. Möglicherweise hat die Gleichung mehrere Lösungen. Man bestimmt die Lösungen $u_1, u_2, u_3 \ldots$
5. Schritt: Durch Einsetzen der Lösungen u_i erhält man die gesuchten Berührpunkte $B_i(u_i\,|\,f(u_i))$ und zugehörige Tangentengleichungen $y = f'(u_i) \cdot (x - u_i) + f(u_i)$.

Autor: Dr. Frieder Haug

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Die Gerade, die senkrecht zu einer Tangente verläuft, heißt Normale. Sie hat die Steigung $-\frac{1}{f'(u)}$, falls $f'(u) \neq 0$ ist. Die allgemeine Normalengleichung lautet
$y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$.
Um eine Normale von einem Punkt A, der nicht auf dem Graphen liegt, an den Graphen zu bestimmen **(Normale von außen)**, geht man genauso vor, wie es in den obigen fünf Schritten für die Tangente von außen beschrieben wurde. Nur die Tangentengleichung wird durch die Normalengleichung ersetzt.



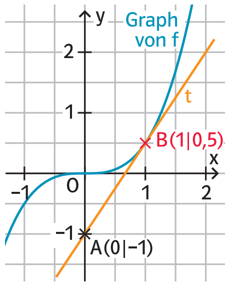
Beispiel

Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ und der Punkt $A(0|-1)$. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f, die durch den Punkt A verläuft.

Lösung

1. Schritt: $f'(x) = \frac{3}{2}x^2$, $f(u) = \frac{1}{2}u^3$, $f'(u) = \frac{3}{2}u^2$
2. Schritt: Tangentengleichung: $y = \frac{3}{2}u^2 \cdot (x - u) + \frac{1}{2}u^3$ bzw. $y = \frac{3}{2}u^2 x - u^3$
3. Schritt: Punktprobe mit $A(0|-1)$: $-1 = -u^3$
4. Schritt: Lösung der Gleichung: $u = 1$
5. Schritt: $f(1) = \frac{1}{2}$, also Berührpunkt $B\left(1\middle|\frac{1}{2}\right)$; Tangentengleichung: $y = \frac{3}{2}x - 1$

Zur Kontrolle:



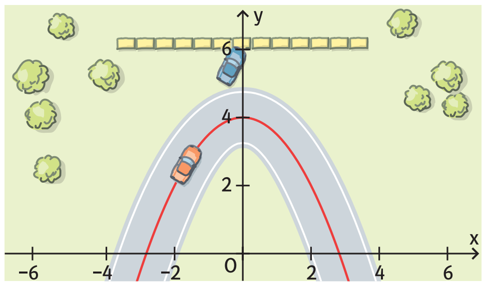
Aufgaben

○ **1** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^2$. Bestimmen Sie Gleichungen der Tangenten und die Berührpunkte, wenn die Tangenten an den Graphen von f durch den gegebenen Punkt verlaufen.
a) $A(0|-2)$ **b)** $B(0|-4{,}5)$ **c)** $C(3|2{,}5)$ **d)** $D(-1|0)$

○ **2** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^2 - 3$. Bestimmen Sie falls möglich Gleichungen aller möglichen Tangenten an den Graphen der Funktion f, die durch den Punkt Punkt A verlaufen.
a) $A(0|-21)$ **b)** $A(2|-3)$ **c)** $A\left(2\middle|-\frac{9}{8}\right)$ **d)** $A(-3|15)$ **e)** $A(0|0)$ **f)** $A(1|2)$

○ **3** Eine Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3$ verläuft durch den Punkt $P(2|4)$ und berührt den Graphen von f im Bereich $0 \leq x \leq 2$. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Tangente und geben Sie die Koordinaten des Berührpunktes an.

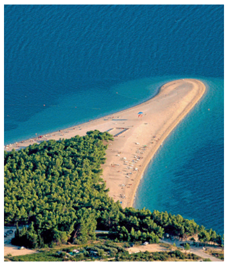
○ **4** Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2$ beschreibt die in nebenstehender Grafik rot gezeichnete Mittellinie einer von oben betrachteten Rennstrecke. Die Strohballen werden durch die Gerade $y = 6$ beschrieben. Ein Rennwagen trifft im Punkt $Y(0|6)$ auf die Strohballen.
Berechnen Sie, in welchem Punkt das Fahrzeug die Rennstrecke verlassen hat.



○ Test

5 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^4 + x^2 + 8$. Bestimmen Sie Gleichungen der Tangenten an den Graphen von f, die durch den Punkt $A(0|1)$ verlaufen. Geben Sie die Berührpunkte der Tangenten an.

Autor: Dr. Frieder Haug
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5



6 Die Form des Ufers einer Landzunge wird näherungsweise durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -2x^2 + 3x + 10$ beschrieben (1 LE entspricht 10 m). Welche Punkte des Ufers kann man von einem Boot, das sich im Punkt $P(3\,|\,5{,}5)$ befindet, sehen?

7 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Tangente an den Graphen von f im Punkt $B(2\,|\,f(2))$ mit den Koordinatenachsen.

b) Bestimmen Sie Gleichungen der Tangenten an den Graphen von f durch $A(0\,|\,a)$ in Abhängigkeit von $a > 0$.

8 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P\left(2\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)$.

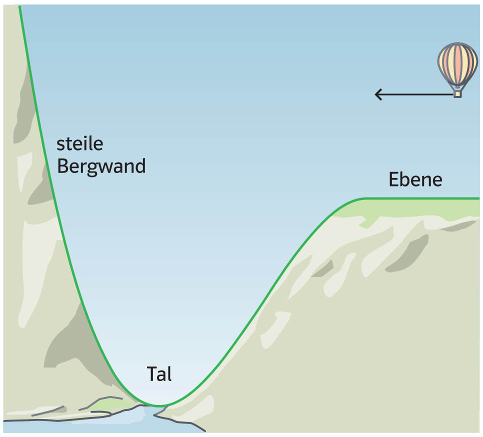
b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f, die durch den Punkt $Q(0\,|\,4)$ verläuft. Geben Sie auch den Berührpunkt dieser Tangente an.

c) Bestimmen Sie Gleichungen der Tangenten an den Graphen von f, die durch den Punkt $R(1\,|\,0{,}19)$ verlaufen. Geben Sie auch die Berührpunkte dieser Tangenten an.

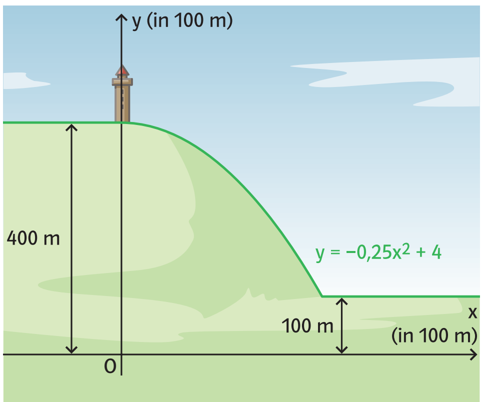
d) Bestimmen Sie eine Gleichung der Normalen an den Graphen von f im Punkt $P\left(2\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)$.

e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Normalen an den Graphen der Funktion f, die durch den Ursprung verläuft.

9 Ein Geländeverlauf besteht aus einem Tal, das sich rechts von einer steilen Bergwand befindet. Die Abbildung zeigt einen Querschnitt durch das Gelände. Dieser Querschnitt wird im Bereich $-3 \le x \le 4$ durch die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4$ beschrieben. Hierbei entspricht eine Längeneinheit in der Natur 100 m. Für $x > 4$ schließt sich ein ebenes Gelände an (vgl. Abbildung). In konstant 200 m Höhe über dem ebenen Gelände nähert sich von rechts ein Ballon.
Berechnen Sie, an welchem Punkt der Bahn des Ballons man erstmals den tiefsten Punkt des Tals sehen kann.



10 Die Abbildung zeigt den Querschnitt eines Hanges mit einem 100 m hohen Aussichtsturm. Welcher Bereich ist von der Turmspitze nicht einsehbar?



11 Eine Pflanze ist von Blattläusen befallen. Setzt man kein Gegenmittel ein, so nimmt die Blattlauspopulation auf einem Stengel gemäß der Funktion f mit $f(t) = \frac{300}{0{,}1t + 1}$ (t in Tagen) ab. Setzt man zum Zeitpunkt t_0 Marienkäfer zur Bekämpfung ein, so geht der Graph, der die Population beschreibt, im Punkt $B(t_0\,|\,f(t_0))$ knickfrei in eine Gerade über.

a) Wann sind die Blattläuse auf einem Stengel ausgestorben, wenn man 15 Tage nach Beobachtungsbeginn Marienkäfer auf die Blattläuse ansetzt?

b) Wie viele Tage nach Beobachtungsbeginn müsste man die Marienkäfer ansetzen, wenn man möchte, dass die Läuse spätestens 30 Tage nach Beobachtungsbeginn ausgestorben sind?

Autor: Dr. Frieder Haug
Bildquellen: Landzunge: Fotolia.com (Andrea Wilhelm), New York; Marienkäfer: BigStockPhoto.com (mmarcol), Davis, CA
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

12 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ beschreibt den Verlauf einer von oben betrachteten Hauptstraße. Zwei Höfe in den Punkten $P(16\,|\,0{,}5)$ bzw $Q(0\,|\,12{,}75)$ sollen jeweils über eine möglichst kurze Zufahrtsstraße an die Hauptstraße angeschlossen werden (Längeneinheit: 1 km).

a) Veranschaulichen Sie sich die Situation anhand einer Skizze.

b) Berechnen Sie mithilfe von Normalen, wie lang die beiden Zufahrtsstraßen jeweils werden.

13 Der Verlauf eines von oben betrachteten Straßenstücks wird im Bereich $-1 \le x \le 6$ durch die Gleichung $y = 0{,}1x^2 - 0{,}6x + 2{,}9$ beschreiben (Längeneinheit: 100 m).

a) Die Straße soll für $x < -1$ geradlinig ohne Knick weitergeführt werden. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die dieses Straßenstück beschreibt.

b) Vom Punkt $P(-1\,|\,0)$ soll eine weitere geradlinige Straße gebaut werden, die knickfrei in die vorhandene Straße einmündet. Berechnen Sie, in welchem Punkt diese Straße in die vorhandene Straße einmündet.

Test

14 Durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -0{,}002x^4 + 0{,}122x^2 - 1{,}8$ (x und f(x) in Metern) wird für $-5 \le x \le 5$ ein Kanalquerschnitt dargestellt. Die sich nach beiden Seiten anschließende Landfläche liegt auf der Höhe $y = 0$. Berechnen Sie den tiefsten Punkt des Kanals. Berechnen Sie zudem, in welchem Abstand vom Kanalrand eine aufrecht stehende Person mit einer Augenhöhe von 1,60 m den tiefsten Punkt des Kanals sehen kann.

15 **a)** Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente von $A(4\,|\,0)$ an den Graphen von f mit $f(x) = e^x$.

b) Untersuchen Sie, von welchen Punkten aus man keine, eine oder zwei Tangenten an den Graphen von f mit $f(x) = e^x$ legen kann.

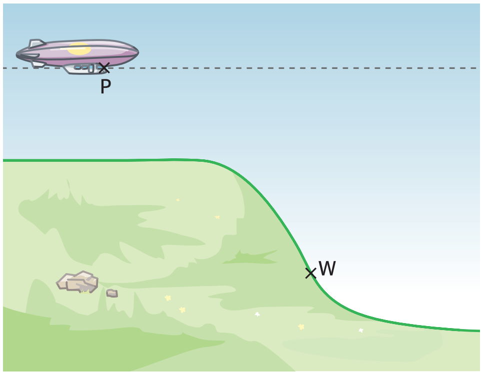
c) Untersuchen Sie, durch welche Punkte keine, eine oder zwei Tangenten an die Parabel $y = x^2$ verlaufen.

16 **a)** Bestimmen Sie näherungsweise mit einem Geodreieck,

(1) welcher Bereich des Hangs im Schatten liegt, wenn die Sonnenstrahlen von links unter einem Winkel von 45° einfallen,

(2) ab welcher Position des Zeppelins ein Wanderer in W den Zeppelin sehen kann,

(3) welchen Bereich des Hanges die Pilotin bei ihrer jetzigen Position nicht sehen kann.



b) Lösen Sie Teilaufgabe a) rechnerisch, wenn Folgendes gegeben ist:
Das Hangprofil wird durch die Funktion f beschrieben mit

$f(x) = 0{,}8$ für $x < 0$,

$f(x) = 0{,}8 - 2x^2$ für $0 \le x < 0{,}5$ und

$f(x) = \frac{0{,}9}{20x - 7}$ für $x \ge 0{,}5$ (Längeneinheit: 1 km).

Der Wanderer befindet sich im Punkt $W(0{,}5\,|\,0{,}3)$, die Pilotin im Punkt $P(-0{,}4\,|\,1{,}2)$.

17 Eine Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ soll durch den Punkt $P(5\,|\,0)$ verlaufen.

a) Bestimmen Sie den Berührpunkt B und eine Gleichung der Tangente.

b) Zeigen Sie, dass jede Normale an den Graphen von f durch den Ursprung verläuft.

c) Beschreiben Sie den Graphen von f in Worten.

Autor: Dr. Frieder Haug

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Lösungen

Einstiegsaufgabe

Das Scheinwerferlicht strahlt immer entlang einer Tangente an die Straßenkurve. Es ist die Tangente in dem Punkt der Kurve, in dem sich Anke gerade befindet.
Wenn also das Scheinwerferlicht den Elch erfasst, so muss die Tangente in dem Punkt, in dem sich das Motorrad befindet, durch E verlaufen. Man sucht also alle Kurvenpunkte, in denen die zugehörige Tangente durch E verläuft. Dazu muss man von E ausgehend die Tangenten an die Kurve, die die Straße darstellt, legen. Die Berührpunkte dieser Tangenten sind die Punkte, von denen aus die Scheinwerfer direkt auf den Elch zeigen.

1

a) Tangentengleichungen: t_1: $y = -2x - 2$ und t_2: $y = 2x - 2$.
Berührpunkte: $B_1(-2|2)$ und $B_2(2|2)$.
b) Tangentengleichungen: t_1: $y = -3x - 4{,}5$ und t_2: $y = 3x - 4{,}5$.
Berührpunkte: $B_1(-3|4{,}5)$ und $B_2(3|4{,}5)$.
c) Tangentengleichungen: t_1: $y = 5x - 12{,}5$ und t_2: $y = x - 0{,}5$.
Berührpunkte: $B_1(5|12{,}5)$ und $B_2(1|0{,}5)$.
d) Tangentengleichungen: t_1: $y = 0$ und t_2: $y = -2x - 2$.
Berührpunkte: $B_1(0|0)$ und $B_2(-2|2)$.

2

Allgemeine Tangentengleichung: $y = 4ux - 2u^2 - 3$.
a) $-21 = -2u^2 - 3 \Leftrightarrow 2u^2 = 18$. Lösungen: $u_1 = 3$ und $u_2 = -3$.
Berührpunkte: $B_1(3|15)$ und $B_2(-3|15)$.
Tangentengleichungen: t_1: $y = 12x - 21$ und t_2: $y = -12x - 21$.
b) $-3 = 8u - 2u^2 - 3 \Leftrightarrow u^2 - 4u = u \cdot (u - 4) = 0$. Lösungen: $u_1 = 0$ und $u_2 = 4$.
Berührpunkte: $B_1(0|-3)$ und $B_2(4|29)$.
Tangentengleichungen: t_1: $y = -3$ und t_2: $y = 16x - 35$.
c) $-\frac{9}{8} = 8u - 2u^2 - 3 \Leftrightarrow 2u^2 - 8u + \frac{15}{8} = 0$. Lösungen: $u_1 = \frac{15}{4} = 3{,}75$ und $u_2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$.
Berührpunkte: $B_1(3{,}75|25{,}125)$ und $B_2(0{,}25|-2{,}875)$.
Tangentengleichungen: t_1: $y = 15x - 31{,}125$ und t_2: $y = x - 3{,}125$.
d) $15 = -12u - 2u^2 - 3 \Leftrightarrow 2u^2 + 12u + 18 = 0$. Lösung: $u = -3$.
Berührpunkt: $B(-3|15)$.
Tangentengleichung: t: $y = -12x - 21$.
e) $0 = -2u^2 - 3 \Leftrightarrow 2u^2 = -3$. Keine Lösungen.
Es gibt keine Tangenten an den Graphen, die durch A verlaufen.
f) $2 = 4u - 2u^2 - 3 \Leftrightarrow 2u^2 - 4u + 5 = 0$. Keine Lösungen.
Es gibt keine Tangenten an den Graphen, die durch A verlaufen.

3

Allgemeine Tangentengleichung: $y = 3u^2x - 2u^3$.
Punktprobe: $4 = 6u^2 - 2u^3$.
Lösung im Bereich $0 \le x \le 2$ (geraten): $u = 1$.
Berührpunkt: $B(1|1)$.
Tangentengleichung: t: $y = 3x - 2$.

4

Allgemeine Tangentengleichung: $y = -ux + \frac{1}{2}u^2 + 4$.
Punktprobe mit $Y(0|6)$: $6 = \frac{1}{2}u^2 + 4$. Lösungen: $u_1 = -2$ und $u_2 = 2$.
Berührpunkte: $B_1(-2|2)$ und $B_2(2|2)$.
Da das Fahrzeug gemäß der Abbildung von links nach rechts fährt, ist der gesuchte Punkt $B_1(-2|2)$.

Autor: Dr. Frieder Haug
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

5

Allgemeine Tangentengleichung: $y = (8u^3 + 2u) \cdot (x - u) + (2u^4 + u^2 + 8) = (8u^3 + 2u)x - 6u^4 - u^2 + 8$.
Punktprobe: $1 = -6u^4 - u^2 + 8 \Leftrightarrow 6u^4 + u^2 - 7 = 0$.
Substitution $z = u^2$: $6z^2 + z - 7 = 0$.
Lösungen: $u_1 = 1$ und $u_2 = -\frac{7}{6}$.
Rücksubstitution: $u^2 = z_1 = 1 \Rightarrow u_1 = 1$ und $u_2 = -1$; $u^2 = z_2 = -\frac{7}{6}$ unlösbar.
Berührpunkte: $B_1(1\,|\,11)$ und $B_2(-1\,|\,11)$.
Tangentengleichungen: t_1: $y = 10x + 1$ und t_2: $y = -10x + 1$.

6

Allgemeine Tangentengleichung: $y = (-4u + 3)x + 2u^2 + 10$.
Punktprobe mit $P(3\,|\,5{,}5)$: $2u^2 - 12u + 13{,}5 = 0$.
Lösungen: $u_1 = 4{,}5$ und $u_2 = 1{,}5$.
Berührpunkte: $B_1(4{,}5\,|\,-17)$ und $B_2(1{,}5\,|\,10)$.
Tangentengleichungen: t_1: $y = -15x + 50{,}5$ und t_2: $y = -3x + 14{,}5$.
Ergebnis: Der Küstenbereich ist zwischen den Punkten $B_1(4{,}5\,|\,-17)$ und $B_2(1{,}5\,|\,10)$ des Ufers der Landzunge vom Punkt $P(3\,|\,5{,}5)$ aus einsehbar.

7

Allgemeine Tangentengleichung: $y = -\frac{2}{u^3}x + \frac{3}{u^2}$.
a) Gleichung der Tangente in $B(2\,|\,f(2)) = B(2\,|\,0{,}25)$: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.
Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse: $S_x(3\,|\,0)$.
Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse: $S_y\left(0\,\middle|\,\frac{3}{4}\right)$.
b) Punktprobe mit $A(0\,|\,a)$: $a = \frac{3}{u^2}$. Somit gilt $u_1 = \sqrt{\frac{3}{a}}$ und $u_2 = -\sqrt{\frac{3}{a}}$.
Berührpunkte: $B_1\left(\sqrt{\frac{3}{a}}\,\middle|\,\frac{a}{3}\right)$ und $B_2\left(-\sqrt{\frac{3}{a}}\,\middle|\,\frac{a}{3}\right)$.
Tangentengleichungen: t_1: $y = -\frac{2\sqrt{a^3}}{\sqrt{27}}x + a$ und t_2: $y = \frac{2\sqrt{a^3}}{\sqrt{27}}x + a$.

8

Allgemeine Tangentengleichung: $y = -\frac{1}{u^2}x + \frac{2}{u}$.
Allgemeine Normalengleichung: $y = u^2x - u^3 + \frac{1}{u}$.
a) $y = -\frac{1}{4}x + 1$
b) $y = -4x + 4$
Berührpunkt: $B\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,2\right)$.
c) Punktprobe mit $R(1\,|\,0{,}19)$: $0{,}19 = -\frac{1}{u^2} + \frac{2}{u} \Leftrightarrow 0{,}19u^2 - 2u + 1 = 0$.
Lösungen: $u_1 = 10$ und $u_2 = \frac{10}{19}$.
Berührpunkte: $B_1(10\,|\,0{,}1)$ und $B_2\left(\frac{10}{19}\,\middle|\,1{,}9\right)$.
Tangentengleichungen: t_1: $y = 0{,}01x + 0{,}2$ und t_2: $y = -3{,}61x + 3{,}8$.
d) $y = 4x - 7{,}5$
e) Punktprobe mit der allgemeinen Normalengleichung mit dem Ursprung $O(0\,|\,0)$: $0 = -u^3 + \frac{1}{u}$.
Lösungen: $u_1 = 1$ und $u_2 = -1$.
Berührpunkte: $B_1(1\,|\,1)$ und $B_2(-1\,|\,-1)$.
Normalengleichung für beide Berührpunkte: n: $y = x$.

9

Es muss die Tangente vom Tiefpunkt des Graphen an den Graphen gelegt werden.
Bestimmung des Tiefpunktes des Graphen von f:
$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$, $f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$
Mögliche Extremstellen:
$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x = 0$. Lösungen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.
Überprüfung der möglichen Extremstelle $x_1 = 0$:
$f''(0) = \frac{3}{2} > 0$, also Minimum. Mit $f(0) = -4$ erhält man den Tiefpunkt $T(0\,|\,-4)$

Autor: Dr. Frieder Haug
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

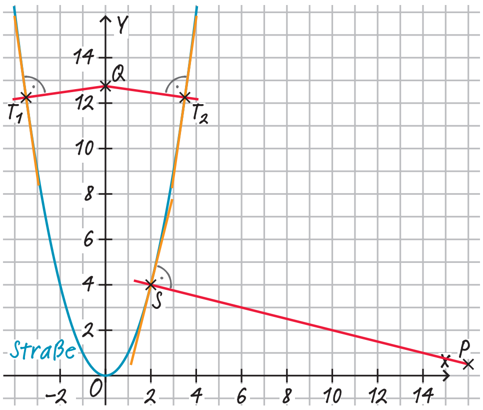
Überprüfung der möglichen Extremstelle $x_2 = 4$:
$f''(4) = -\frac{3}{2} < 0$, also Maximum.
Tangente vom Tiefpunkt an den Graphen von f:
Allgemeine Tangentengleichung: $y = \left(-\frac{3}{8}u^2 + \frac{3}{2}u\right)x + \frac{1}{4}u^3 - \frac{3}{4}u^2 - 4$.

Punktprobe mit $T(0\,|\,-4)$: $-4 = \frac{1}{4}u^3 - \frac{3}{4}u^2 - 4$. Lösungen $u_1 = 0$ und $u_2 = 3$.
Bei $u_1 = 0$ befindet sich der Tiefpunkt. Also ist $B(3\,|\,f(3)) = B\left(3\,\middle|\,-\frac{5}{8}\right)$ der Berührpunkt der Tangente.
Tangentengleichung $t: y = \frac{9}{8}x - 4$.
Schnittpunkt der Tangente mit der Geraden $y = 2$: $S\left(\frac{16}{3}\,\middle|\,2\right)$. Ab dem Punkt $S(5{,}33\,|\,2)$ der Bahn des Ballons kann man den tiefsten Punkt des Tals sehen.

10
Turmspitze: $T(0\,|\,5)$.
Der nicht einsehbare Bereich wird begrenzt durch die Tangente an den Graphen von f durch T.
$f(x) = -0{,}25x^2 + 4$, $f'(x) = -0{,}5x$
Allgemeine Tangentengleichung: $y = -0{,}5u(x-u) - 0{,}25u^2 + 4 = -0{,}5ux + 0{,}25u^2 + 4$.
Punktprobe mit $T(0\,|\,5)$: $5 = 0{,}25u^2 + 4$. Lösungen: $u_1 = 2$ und $u_2 = -2$. Aus dem Sachzusammenhang ergibt sich, dass die Lösung positiv sein muss.
Tangentengleichung für $u_1 = 2$: $y = -x + 5$.
Die Tangente berührt den Graphen im Punkt $P(2\,|\,3)$.
Die Tangente schneidet die Gerade $y = 1$ (Erdoberfläche) an der Stelle $x = 4$, also im Punkt $E(4\,|\,1)$.
Somit sind die Punkte zwischen $P(2\,|\,3)$ und $E(4\,|\,1)$ nicht einsehbar.

11
$f(t) = \frac{300}{0{,}1t+1}$, $f'(t) = -\frac{30}{(0{,}1t+1)^2}$
Allgemeine Tangentengleichung: $y = -\frac{30}{(0{,}1u+1)^2}\cdot(x-u) + \frac{300}{0{,}1u+1}$.
a) Tangente für $u = 15$: $y = -4{,}8x + 192$.
Die Tangente schneidet die Gerade $y = 0$ an der Stelle $x = \frac{192}{4{,}8} = 40$.
Nach 40 Tagen sind alle Läuse vernichtet.
b) Punktprobe der allgemeinen Tangentengleichung mit $P(30\,|\,0)$:
$0 = -\frac{30}{(0{,}1u+1)^2}\cdot(30-u) + \frac{300}{0{,}1u+1} \qquad |\cdot(0{,}1t+1)^2$
$0 = -30\cdot(30-u) + 300\cdot(0{,}1u+1) = -900 + 30u + 30u + 300 = -600 + 60u$
Lösung: $u = 10$.
Man muss die Marienkäfer nach zehn Tagen ansetzen, damit die Blattläuse nach 30 Tagen vernichtet sind.

12
a) Skizze: vgl. Abbildung rechts.
b) Die kürzeste Zufahrtstraße verläuft jeweils auf der Normalen vom Punkt P bzw. Q an den Graphen.
Allgemeine Normalengleichung:
$y = -\frac{1}{2u}x + \frac{1}{2} + u^2$.
Punktprobe mit $P(16\,|\,0{,}5)$:
$0{,}5 = -\frac{8}{u} + \frac{1}{2} + u^2$.
Lösung: $u = 2$.
Schnittpunkt der Normalen mit dem Graphen:
$S(2\,|\,4)$.
Länge der Zufahrtstraße:
$\overline{SP} = \sqrt{208{,}25} \approx 14{,}43$. Die kürzeste Zufahrtstraße von P aus ist ca. 14,43 km lang.



Punktprobe mit $Q(0\,|\,12{,}75)$: $12{,}75 = \frac{1}{2} + u^2$. Lösungen: $u_{1,2} = \pm 3{,}5$.
Schnittpunkte der Normalen mit dem Graphen: $T_{1,2}(\pm 3{,}5\,|\,12{,}25)$.
Länge der Zufahrtstraßen: $\overline{T_1Q} = \overline{T_2Q} = \sqrt{12{,}5} \approx 3{,}54$.
Es gibt zwei gleich lange kürzeste Zufahrtstraßen von Q. Sie sind jeweils ca. 3,54 km lang.

Autor: Dr. Frieder Haug
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

13

Allgemeine Tangentengleichung: $y = (0{,}2u - 0{,}6)x - 0{,}1u^2 + 2{,}9$.

a) Tangente in $P(-1\,|\,3{,}6)$: $y = -0{,}8x + 2{,}8$

Das Straßenstück wird durch die Gleichung $y = -0{,}8x + 2{,}8$ beschrieben.

b) Die Punktprobe mit $P(-1\,|\,0)$ führt auf $u^2 + 2u - 35 = 0$. Lösungen: $u_1 = 5$ und $u_2 = -7$. u_2 gehört nicht zum Bereich des Straßenstücks. Somit endet die Straße in $Q(5\,|\,2{,}4)$.

14

$f'(x) = -0{,}008x^3 + 0{,}244x$, $f''(x) = -0{,}024x^2 + 0{,}244$

Mögliche Extremstellen:

$f'(x) = 0 \iff -0{,}008x^3 + 0{,}244x = 0$.

Lösungen: $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm\sqrt{30{,}5}$.

Untersuchung der möglichen Extremstelle $x_1 = 0$: $f''(0) = 0{,}244 > 0$, also Minimum. Mit $f(0) = -1{,}8$ erhält man $T(0\,|\,-1{,}8)$.

Untersuchung der möglichen Extremstellen $x_{2,3} = \pm\sqrt{30{,}5}$: $f''\left(\pm\sqrt{30{,}5}\right) = -0{,}488 > 0$, also Maximum.

Allgemeine Tangentengleichung: $y = (-0{,}008u^3 + 0{,}244u) \cdot x + 0{,}006u^4 - 0{,}122u^2 - 1{,}8$.

Punktprobe mit $T(0\,|\,-1{,}8)$: $0{,}006u^4 - 0{,}122u^2 = 0$ mit den Lösungen $u_1 = 0$ und $u_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{61}{3}}$.

$u_1 = 0$ ist der x-Wert des Tiefpunktes. Aufgrund der Symmetrie des Kanals kann man annehmen, dass $u_2 = \sqrt{\frac{61}{3}}$ der x-Wert des Berührpunktes ist.

Tangentengleichung für $u_2 = \sqrt{\frac{61}{3}}$: $y = \sqrt{\frac{61}{3}} \cdot \frac{0{,}244}{3} \cdot x - 1{,}8 \approx 0{,}367x - 1{,}8$.

Die Tangente schneidet die Gerade mit $y = 1{,}6$ (Augenhöhe) an der Stelle $x \approx 9{,}264 \approx 9{,}3$. Das Kanalufer ist bei $x = 5$.

Daher darf die Person höchstens $(9{,}3 - 5)\,\text{m} = 4{,}3\,\text{m}$ vom Kanalufer entfernt stehen, damit sie den tiefsten Punkt sehen kann.

15

a) Allgemeine Tangentengleichung:

$y = e^u x - u e^u + e^u$.

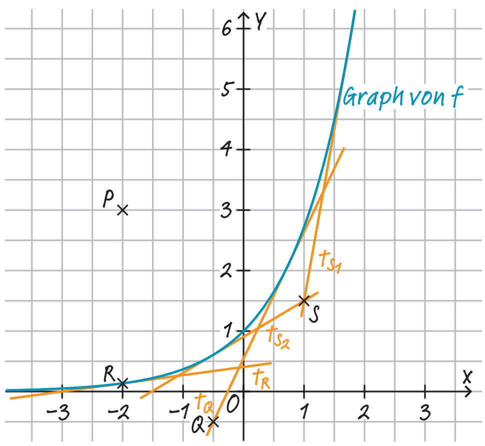
Punktprobe mit $A(4\,|\,0)$:

$0 = e^u \cdot 4 - u e^u + e^u = e^u(5 - u)$.

Lösung $u = 5$.

Berührpunkt: $B(5\,|\,e^5)$.

Tangentengleichung: $y = e^5 x - 4 \cdot e^5$.



b) Durch die Punkte P oberhalb des Graphen von f verläuft keine Tangente. Dies sind die Punkte $P(a\,|\,b)$ mit $b > e^a$.

Von Punkten Q, die auf oder unterhalb der x-Achse liegen, kann man genau eine Tangente an den Graphen von f legen. Dies gilt also für alle Punkte $Q(a\,|\,b)$ mit $b \le 0$.

Durch Punkte R, die auf dem Graphen von f liegen, verläuft ebenfalls genau eine Tangente. Das sind die Punkte $R(a\,|\,b)$ mit $b = e^a$.

Von einem Punkt S, der zwischen der x-Achse und dem Graphen von f liegt, kann man zwei Tangenten an den Graphen von f legen. Dies gilt also für alle Punkte $S(a\,|\,b)$ mit $0 < b < e^a$.

c) Durch Punkte P oberhalb der Parabel verläuft keine Tangente. Dies sind die Punkte $P(a\,|\,b)$ mit $b > a^2$.

Durch Punkte Q, die auf der Parabel liegen, verläuft genau eine Tangente. Das sind die Punkte $Q(a\,|\,b)$ mit $b = a^2$.

Von einem Punkt R unterhalb der Parabel kann man zwei Tangenten an die Normalparabel legen. Das gilt also für alle Punkte $R(a\,|\,b)$ mit $b < a^2$.

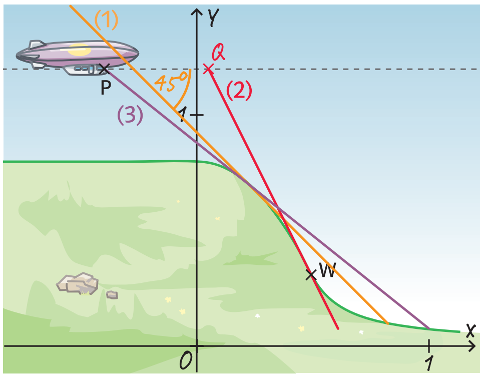
Autor: Dr. Frieder Haug

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

16

a) Zeichnerische Lösung: vgl. Abbildung rechts.

b) Der Ursprung des Koordinatensystems liegt wie in der Grafik rechts angegeben.



(1) Die Tangente an den Graphen von f mit der Steigung -1 (entspricht den Sonnenstrahlen) begrenzt den Schattenbereich. Aus der Bedingung $f'(x) = -4x = -1$ erhält man den Berührpunkt $B(0{,}25 \mid 0{,}675)$ und die Tangentengleichung $y = -x + 0{,}925$. Die Tangente schneidet den Graphen im Bereich $x \geq 0{,}5$ an der Stelle $x \approx 0{,}832$. Der Bereich mit $0{,}25 < x < 0{,}832$ liegt im Schatten.

(2) Der Wanderer kann die Zeppelinspitze zum ersten Mal sehen, wenn dessen Spitze im Punkt Q ist, wobei die Gerade durch Q und W eine Tangente an den Graphen von f im Punkt W ist. Es ist $f'(0{,}5) = -4 \cdot 0{,}5 = -2$. Die allgemeine Tangentengleichung ist $y = -2x + 1{,}3$. Die Tangente schneidet die Gerade $y = 1{,}2$ im Punkt $Q(0{,}05 \mid 1{,}2)$.

(3) Die Tangente an den Graphen von f durch $P(-0{,}4 \mid 1{,}2)$ begrenzt den nicht sichtbaren Bereich.
Allgemeine Tangentengleichung: $y = -4u(x-u) - 2u^2 + 0{,}8 = -4ux + 2u^2 + 0{,}8$.
Punktprobe mit $P(-0{,}4 \mid 1{,}2)$: $1{,}2 = 1{,}6u + 2u^2 + 0{,}8 \Leftrightarrow 2u^2 + 1{,}6u - 0{,}4 = 0$. Lösungen: $u_1 = 0{,}2$ und $u_2 = -1$. Aus dem Sachzusammenhang ergibt sich, dass nur $u_1 = 0{,}2$ eine Lösung ist.
Berührpunkt: $B(0{,}2 \mid 0{,}72)$. Tangentengleichung: $y = -0{,}8x + 0{,}88$.
Schnitt der Tangente mit dem Graphen von f für $x \geq 0{,}5$:
$-0{,}8x + 0{,}88 = \frac{0{,}9}{20x - 7} \Leftrightarrow -16x^2 + 23{,}2x - 7{,}06 = 0$.
Lösungen: $x_1 \approx 1{,}0155$ und $x_2 \approx 0{,}4345$. Nur x_1 liegt im Bereich $x \geq 0{,}5$. Somit kann die Pilotin alle Punkte mit x-Koordinaten zwischen 0,2 und ≈ 1,0 nicht einsehen.

17

$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$ $(-3 < x < 3)$

a) Allgemeine Tangentengleichung: $y = -\frac{u}{\sqrt{9 - u^2}} \cdot (x - u) + \sqrt{9 - u^2}$.

Punktprobe mit $P(5 \mid 0)$: $0 = -\frac{u}{\sqrt{9 - u^2}} \cdot (5 - u) + \sqrt{9 - u^2}$ $\quad | \cdot \sqrt{9 - u^2}$

$0 = -5u + u^2 + 9 - u^2 = -5u + 9$

Lösung: $u = 1{,}8$.

$f(u) = 2{,}4$; $f'(u) = -0{,}75$

Berührpunkt: $B(1{,}8 \mid 2{,}4)$.

Gleichung der Tangente: $y = -0{,}75x + 3{,}75$.

b) Allgemeine Normalengleichung für $-3 < u < 3$ und $u \neq 0$: $y = \frac{\sqrt{9 - u^2}}{u} \cdot (x - u) + \sqrt{9 - u^2} = \frac{\sqrt{9 - u^2}}{u} x$.

Der Punkt $O(0 \mid 0)$ liegt auf der Normalen. Für $u = 0$ ist die y-Achse die Normale.

c) Der Graph von f ist ein Halbkreis um den Ursprung mit Radius 3 LE und liegt oberhalb der x-Achse.

Autor: Dr. Frieder Haug

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5