Aufgaben zur Vertiefung der Analysis im Leistungsfach

1 Kettenregel für drei Funktionen

Einsetzbar ab Lerneinheit 4 in Kapitel I.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin((2x)^3)$.

a) Verwenden Sie $(2x)^3 = 8x^3$ und leiten Sie f mit der Kettenregel ab.

b) Man kann die Funktion f als Verkettung von drei Funktionen auffassen, also $f(x) = g(h(k(x)))$. Geben Sie die Funktionen g, h und k an.

c) Es sei $l(x) = h(k(x))$, also $f(x) = g(l(x))$. Geben Sie $l(x)$ an, berechnen Sie $l'(x)$ mit der Kettenregel und bestimmen Sie damit die Ableitung von f. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Teilaufgabe a).

d) Zeigen Sie allgemein die folgende Ableitungsregel:
Wenn $f(x) = g(h(k(x)))$ ist, so gilt $f'(x) = g'(h(k(x)) \cdot h'(k(x)) \cdot k'(x)$.

e) Leiten Sie die Funktion f mit $f(x) = ((5x+1)^3 + 1)^2$ auf verschiedene Arten ab. Vergleichen Sie.

2 Verkettung von drei Funktionen

Einsetzbar ab Lerneinheit 3 in Kapitel I.

Die Verkettung $\circ$ von zwei Funktionen u und v ist bekanntlich wie folgt definiert:
$(u \circ v)(x) = u(v(x))$.

a) Es sei $u(x) = x^2$, $v(x) = \cos(x)$ und $w(x) = 3x$.
Geben Sie $(v \circ w)(x)$, $(u \circ v)(x)$ und damit $(u \circ (v \circ w))(x)$ und $((u \circ v) \circ w)(x)$ an.

b) Es sei $f(x) = 2^{(3x)^2}$. Geben Sie Funktionen g, h und k an, sodass $f = g \circ (h \circ k)$ gilt. Geben Sie $(h \circ k)(x)$, $(g \circ h)(x)$ und damit auch einen Funktionsterm von $l = (g \circ h) \circ k$ an. Vergleichen Sie mit dem Funktionsterm von f.

c) Zeigen Sie allgemein, dass die Verkettung assoziativ ist, dass also $g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k$ gilt (d.h., man kann die Klammern weglassen.)

3 Ableitungsregel für Umkehrfunktionen

Einsetzbar ab Lerneinheit 4 in Kapitel I.

Eine Funktion f heißt umkehrbar, wenn es zu jedem y aus der Wertemenge von f nur genau ein x aus der Definitionsmenge von f mit $f(x) = y$ gibt. Die umgekehrte Zuordnung $y \rightarrow x$ ist dann ebenfalls eine Funktion; sie heißt Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f.
Es gilt $\bar{f}(f(x)) = x$ und $f(\bar{f}(x)) = x$.
Zur Bestimmung der Umkehrfunktion löst man die Gleichung $f(x) = y$ nach x auf. Es entsteht dann die Gleichung $x = \bar{f}(y)$. In $\bar{f}(y)$ ersetzt man y durch x und erhält so den Funktionsterm $\bar{f}(x)$ von $\bar{f}$.
Am Graphen lässt sich die Umkehrbarkeit von f daran erkennen, dass jede Parallele zur x-Achse den Graphen von f höchstens einmal schneidet. Dies ist sicher der Fall, wenn f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.
Die Funktion f mit $f(x) = x^2$ ist nicht umkehrbar, wenn man als Definitionsmenge $\mathbb{R}$ verwendet, da z.B. durch f sowohl $x = 2$ als auch $x = -2$ auf $y = 4$ abgebildet wird. Die Funktion f ist aber umkehrbar, wenn man als Definitionsmenge nur die Menge der positiven Zahlen $\mathbb{R}^+$ verwendet.

a) Geben Sie zu den Funktionen eine Definitionsmenge an, auf der die Funktion umkehrbar ist. Geben Sie dann die Umkehrfunktion an.

(A) $f(x) = x + 1$	(B) $f(x) = x^2$	(C) $f(x) = \frac{1}{x}$	(D) $f(x) = \sqrt[4]{x}$
(E) $f(x) = 3x - 5$	(F) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$	(G) $f(x) = \frac{3x-5}{2x-7}$	(H) $f(x) = -x$

b) Beweisen Sie mithilfe von $f(\bar{f}(x)) = x$ die folgende Ableitungsregel für Umkehrfunktionen:
$\bar{f}'(x) = \frac{1}{f'(\bar{f}(x))}$.

c) Leiten Sie die die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ auf zwei Arten ab.

d) Begründen Sie: Der Graph der Funktion $\bar{f}$ entsteht aus dem Graphen von f durch eine Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden mit der Gleichung $y = x$.

e) Begründen Sie: Wenn man als Definitionsmenge der Sinusfunktion das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ verwendet, so ist die Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion $\bar{f}$ heißt Arkussinusfunktion mit $\bar{f}(x) = \arcsin(x)$ (auf dem Taschenrechner kurz $\sin^{-1}(x)$). Zeigen Sie mithilfe des Einheitskreises, dass $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ gilt, und folgern Sie daraus $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Autor: Dr. Frieder Haug

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

4 Die 100. Ableitung einer Funktion f (1) (ohne neue Ableitungsregeln)

Einsetzbar ab Lerneinheit 1 in Kapitel I.

Gegeben ist eine Funktion f. Die erste Ableitung von f ist f′ oder $f^{(1)}$, die zweite Ableitung ist f″ oder $f^{(2)}$, die dritte Ableitung ist f‴ oder $f^{(3)}$. Die n-te Ableitung ist $f^{(n)}$, die 100. Ableitung also $f^{(100)}$.
Folgende Abkürzung ist oft hilfreich: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (lies: n Fakultät).
Berechnen Sie die 100. Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = 1$ **b)** $f(x) = x$ **c)** $f(x) = x^2$
d) $f(x) = x^{99}$ **e)** $f(x) = x^{100}$ **f)** $f(x) = x^{101}$
g) $f(x) = \frac{1}{x}$ **h)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$ **i)** $f(x) = \sqrt{x}$
j) $f(x) = \sin(x)$ **k)** $f(x) = 5 \cdot \cos(x)$ **l)** $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$
m) f ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 99.
n) f ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 100.

5 Die 100. Ableitung einer Funktion f (2) (mit Kettenregel)

Einsetzbar ab Lerneinheit 4 in Kapitel I.

Lesen Sie zur Wiederholung die Einleitung von Aufgabe 4.
Berechnen Sie die 100. Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = \sin(2x)$ **b)** $f(x) = \sin(-5x)$ **c)** $f(x) = \cos(2 - ax)$
d) $f(x) = (2x)^{99}$ **e)** $f(x) = (2x)^{100}$ **f)** $f(x) = (2x + 1)^{100}$
g) $f(x) = \frac{1}{2x + 1}$ **h)** $f(x) = \sqrt{ax + b}$ **i)** $f(x) = \frac{1}{(ax + b)^2}$

6 Die 100. Ableitung einer Funktion f (3) (mit Produkt- und Kettenregel)

Einsetzbar ab Lerneinheit 5 in Kapitel I.

Lesen Sie zur Wiederholung die Einleitung von Aufgabe 4.
Berechnen Sie die 100. Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = x \cdot \sin(x)$ **b)** $f(x) = x \cdot \cos(0{,}5x)$ **c)** $f(x) = x(x + 1)^3$
d) $f(x) = \frac{x}{x + 1}$ **e)** $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ **f)** $f(x) = x \cdot \sqrt{x + 1}$

7 Die 100. Ableitung einer Funktion f (4) (mit e-Funktion)

Einsetzbar ab Lerneinheit 1 in Kapitel II.

Lesen Sie zur Wiederholung die Einleitung von Aufgabe 4.
Berechnen Sie die 100. Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = e^{-x}$ **b)** $f(x) = e^{ax}$ **c)** $f(x) = \sqrt{e^x}$
d) $f(x) = x \cdot e^x$ **e)** $f(x) = 3x \cdot e^{ax}$ **f)** $f(x) = \sin(x) \cdot e^x$

8 Die 100. Ableitung einer Funktion f (5) (mit ln-Funktion)

Einsetzbar ab Lerneinheit 5 in Kapitel II.

Lesen Sie zur Wiederholung die Einleitung von Aufgabe 4.
Berechnen Sie die 100. Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = x \cdot \ln(x)$ **b)** $f(x) = e^{2x} + \ln(2x)$ **c)** $f(x) = x^{100} \cdot \ln(x)$

9 Logarithmusfunktion mit Parameter (1)

Einsetzbar ab Lerneinheit 5 in Kapitel II.

Für welchen Wert des Parameters a liegt der Extrempunkt des Graphen der Funktionenschar f_a auf der x-Achse?

a) $f_a(x) = \ln(x) - ax$ **b)** $f_a(x) = 4\ln(x) - x^2 + 7x + a$

10 Logarithmusfunktion mit Parameter (2)

Einsetzbar ab Lerneinheit 5 in Kapitel II.

Beschreiben Sie, welche Wirkung eine Erhöhung des Parameters b auf die Lage der Graphen der Funktionenschar f_b hat.

a) $f_b(x) = \ln(x + b)$ **b)** $f_b(x) = \ln(x^b)$ **c)** $f_b(x) = \ln(bx)$

Autor: Dr. Frieder Haug
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

11 **Integrale mit Parameter (1)**

Für welchen Wert des Parameters a gilt $\int_0^2 f_a(x)\,dx = 0$?

Einsetzbar ab Lerneinheit 4 in Kapitel III.

a) $f_a(x) = x^3 - (a+2)x^2 + 2ax$ **b)** $f_a(x) = a e^{ax} - 1$

c) $f_a(x) = \frac{1}{x+1} - a$ **d)** $f_a(x) = a \cdot \sin(ax),\ 0 < a < 2\pi$

e) $f_a(x) = x^2 - ax$ **f)** $f_a(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - ax^2$

12 **Integrale mit Parameter (2)**

Für welchen Wert des Parameters a ist $\int_0^1 f_a(x)\,dx$ minimal?

Einsetzbar ab Lerneinheit 4 in Kapitel III.

a) $f_a(x) = a^2 e^{ax} + a$ **b)** $f_a(x) = ax \cdot (3ax - 2)$

c) $f_a(x) = 1 - a \cdot \cos(ax),\ a \in (0;\, 2\pi)$ **d)** $f_a(x) = 3a^2x^2 + 12ax - 7$

13 **Integralfunktion als Stammfunktion (1)**

Einsetzbar ab Lerneinheit 5 oder Lerneinheit 9 in Kapitel III.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Zu einer reellen Zahl u ist J_u mit $J_u(x) = \int_u^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$ die Integralfunktion von f zur unteren Grenze u.

a) Geben Sie das Monotonieverhalten der Funktion J_u an.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen von J_u.

c) Geben Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von J_u an.

d) Betrachten Sie die Funktion g mit $g(u) = J_{-u}(u)$.

(1) Veranschaulichen Sie die Bedeutung der Funktion g anhand einer Skizze.

(2) Begründen Sie, dass g auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend ist.

(3) Begründen Sie, dass der Graph von g punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

(4) Beweisen Sie, dass $g(u) \le 4$ für alle $u > 1$ gilt.

(5) Skizzieren Sie den Graphen von g.

Bemerkung: Da g monoton wachsend (vgl. (2)) und für alle $u > 1$ durch 4 nach oben beschränkt ist (vgl. (4)), muss $g(u) = \int_{-u}^{u} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ für $u \to \infty$ gegen einen Grenzwert streben. Dieser Grenzwert ist das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$. In (4) wurde bewiesen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt \le 4$ gilt. Man kann beweisen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \pi$ gilt.

14 **Integralfunktion als Stammfunktion (2)**

Einsetzbar ab Lerneinheit 5 in Kapitel III. Vorbereitung für Lerneinheit 10 in Kapitel VIII.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Zu einer reellen Zahl u ist J_u mit $J_u(x) = \int_u^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ die Integralfunktion von f zur unteren Grenze u.

a) Geben Sie das Monotonieverhalten der Funktion J_u an.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen von J_u.

c) Geben Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von J_u an.

d) Betrachten Sie die Funktion g mit $g(u) = J_{-u}(u)$.

(1) Veranschaulichen Sie die Bedeutung der Funktion g anhand einer Skizze.

(2) Begründen Sie, dass g auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend ist.

(3) Begründen Sie, dass der Graph von g punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

e) Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^{-\frac{x}{2}}$. Zeigen Sie, dass $h(x) > f(x)$ für alle $x > 1$ gilt.

Folgern Sie daraus, dass $g(u) \le 2 + \frac{4}{\sqrt{e}}$ für alle u gilt. Skizzieren Sie den Graphen von g.

Bemerkung: Da g monoton wachsend und beschränkt ist, existiert der Grenzwert $\lim\limits_{u \to \infty} \int_{-u}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$. Dieser Grenzwert ist das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$. In Teilaufgabe e) wurde bewiesen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \le 2 + \frac{4}{\sqrt{e}} \approx 4{,}43$ gilt. Man kann beweisen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi} \approx 2{,}51$ ist. Dies wird bei der Normalverteilung benötigt.

Autor: Dr. Frieder Haug

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

15 Stammfunktion, die keine Integralfunktion ist

Einsetzbar ab Lerneinheit 5 in Kapitel III.

Die Funktion f sei auf einem Intervall differenzierbar. Für jedes u aus diesem Intervall ist die Integralfunktion J_u mit $J_u(x) = \int_u^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion von f (vgl. den Satz auf Seite 91 im Schülerbuch). Es soll nun untersucht werden, ob umgekehrt auch jede Stammfunktion eine Integralfunktion für ein geeignetes u ist.

a) Beweisen Sie: Jede Integralfunktion J_u (u aus dem vorgegebenen Intervall) hat mindestens eine Nullstelle auf diesem Intervall.

b) Es sei $f(x) = 2x$. Begründen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = x^2 + 1$ eine Stammfunktion, aber keine Integralfunktion von f ist.

16 Integralfunktion, die keine Stammfunktion ist

Einsetzbar ab Lerneinheit 5 in Kapitel III.

Im Satz auf Seite 91 im Schülerbuch wird vorausgesetzt, dass die Funktion f differenzierbar ist. Erst dann wird gefolgert, dass eine Integralfunktion J_u von f eine Stammfunktion von f ist. Es soll nun untersucht werden, ob man die Voraussetzung, dass f differenzierbar ist, benötigt.

a) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

(1) Zeigen Sie, dass f an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

(2) Zeigen Sie, dass für die Integralfunktion J_0 gilt: $J_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$.

(3) Skizzieren Sie die Graphen von f und J_0.

(4) Beweisen Sie, dass J_0 an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist, und folgern Sie, dass J_0 keine Stammfunktion von f ist.

Zwischenbemerkung: Es wurde bewiesen, dass man die Voraussetzung „f ist differenzierbar." nicht einfach weglassen darf, wenn man beweisen möchte, dass eine Integralfunktion eine Stammfunktion ist. Aber vielleicht kann man diese Voraussetzung abschwächen? Der Graph der betrachteten Funktion f hat an der Stelle 0 einen „Sprung". Das ist eine besondere Form der Nichtdifferenzierbarkeit von f. In Teilaufgabe b) wird nahegelegt, dass eine Integralfunktion eine Stammfunktion ist, obwohl f nicht differenzierbar ist, wenn der Graph von f keine Sprünge macht.

b) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = |x|$.

(1) Zeigen Sie, dass f an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist.

(2) Geben Sie $f(x)$ und $J_0(x)$ mithilfe einer Fallunterscheidung (vgl. Teilaufgabe a)) an.

(3) Skizzieren Sie die Graphen von f und J_0.

(4) Begründen Sie, dass J_0 eine Stammfunktion von f ist.

Nachbemerkung: Man kann allgemein zeigen, dass für Funktionen f, deren Graph „keinen Sprung" macht, jede Integralfunktion eine Stammfunktion ist. Dazu muss man allerdings exakt definieren, was es heißt, dass ein Graph „keinen Sprung" macht. Deshalb hat man den Begriff einer stetigen Funktion eingeführt. Man kann beweisen, dass für stetige Funktionen jede Integralfunktion auch eine Stammfunktion ist.

17 Rotationskörper mit Parameter

Einsetzbar ab Lerneinheit 8 in Kapitel III.

Der Graph der Funktion f_c rotiert über dem Intervall $[0; 1]$ um die x-Achse. Für welchen Wert von c beträgt das Volumen des entstehenden Rotationskörpers $1\,cm^3$? Die Längeneinheit ist 1 cm.

a) $f_c(x) = c \cdot \sqrt{\sin(\pi x)}$

b) $f_c(x) = \sqrt{c} \cdot e^{cx}$, $c > 0$

c) $f_c(x) = cx(x - 1)$

d) $f_c(x) = \sqrt{c} \cdot \sin(cx)$, $0 < c < \pi$

e) $f_c(x) = \sqrt{\frac{c}{cx + 1}}$, $c > 0$

f) $f_c(x) = \frac{1}{cx + 1}$, $c > 0$

Autor: Dr. Frieder Haug

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

18 Uneigentliche Integrale mit Parameter

Einsetzbar ab Lerneinheit 9 in Kapitel III.

Der Graph der Funktion f_k schließt über dem Intervall $[0; \infty)$ mit der x-Achse eine Fläche ein (1 LE entspricht 1 cm). Für welchen Wert von k beträgt der Flächeninhalt dieser Fläche 1 cm²?

a) $f_k(x) = \frac{5}{(x+k)^2}$, $k > 0$

b) $f_k(x) = e^{-3kx}$, $k > 0$

c) $f_k(x) = \frac{1}{(x+1)^k}$, $k > 1$

d) $f_k(x) = \frac{3k-3}{(x+2)^k}$, $k > 1$

19 Die Funktion sin²

Einsetzbar ab Lerneinheit 5 in Kapitel IV.

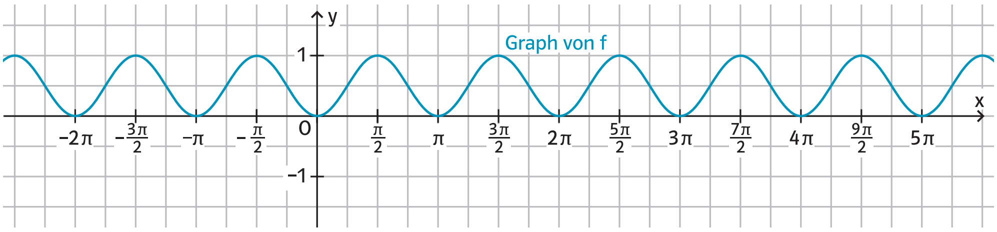


Fig. 1

Fig. 1 zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = (\sin(x))^2 = \sin^2(x)$.
Es scheint, dass der Graph von f durch Streckung und Verschiebung aus dem Graphen der Sinusfunktion entsteht.

a) Geben Sie anhand der Periode, Amplitude und Verschiebungen in x- und y-Richtung einen möglichen Funktionsterm in der Form $a \cdot \sin(b(x - c)) + d$ für $f(x)$ an.

b) Leiten Sie anhand von Fig. 2 die Beziehung $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ her.

c) Zeigen Sie mit dem Satz des Pythagoras, dass $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ gilt.
Folgern Sie daraus die Beziehung
$2 \cdot \sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$ bzw.
$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2x)$.
Vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe a).

d) Berechnen Sie $\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx$.

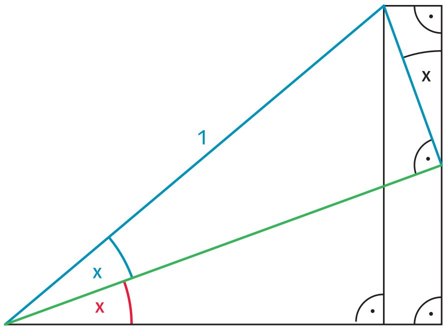


Fig. 2

20 „Höchste“ und „tiefste“ Hochpunkte

Einsetzbar ab Lerneinheit 6 in Kapitel IV.

a) Gegeben ist für jedes $k < 0$ die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = \frac{1}{k^3} - x \cdot e^{-kx}$. Für welchen Wert des Parameters $k < 0$ liegt der Hochpunkt des Graphen von f_k am höchsten?

b) Gegeben ist für jedes k die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = -x^2 + kx + 7k$. Für welchen Wert des Parameters k liegt der Hochpunkt des Graphen von f_k am tiefsten?

21 „Höchster“ Tiefpunkt und keine Schnittpunkte mit der y-Achse

Einsetzbar ab Lerneinheit 6 in Kapitel IV.

a) Gegeben ist für jedes $a < 0$ die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{(x+a)^2} + x \cdot \left(\frac{1}{2}x + a\right) + \frac{1}{a}$.

Für welchen Wert des Parameters $a < 0$ liegen die Tiefpunkte des Graphen von f_a am höchsten?

b) Durch welche Punkte der y-Achse verläuft keiner der Graphen einer Funktion f_a?

Autor: Dr. Frieder Haug

Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Lösungen

1

a) $f(x) = \sin((2x)^3) = \sin(8x^3)$, $f'(x) = 24x^2 \cdot \cos(8x^3)$

b) $g(x) = \sin(x)$, $h(x) = x^3$, $k(x) = 2x$

c) $l(x) = h(k(x)) = (2x)^3$, $l'(x) = h'(k(x)) \cdot k'(x) = 3 \cdot (2x)^2 \cdot 2 = 6 \cdot (2x)^2$

$f'(x) = g'(l(x)) \cdot l'(x) = \cos((2x)^3) \cdot 6 \cdot (2x)^2 = 24x^2 \cdot \cos((2x)^3)$

Der Term für die Ableitung ist äquivalent zum Term von Teilaufgabe a).

d) Es sei $l(x) = h(k(x))$. Dann ist $l'(x) = h'(k(x)) \cdot k'(x)$, $f(x) = g(l(x))$ und

$f'(x) = g'(l(x)) \cdot l'(x) = g'(h(k(x))) \cdot h'(k(x)) \cdot k'(x)$.

e) 1. Möglichkeit: $g(x) = x^2$, $h(x) = x + 1$, $k(x) = (5x + 1)^3$.

Dann ist $f(x) = g(h(k(x)))$.

$g'(x) = 2x$, $h'(x) = 1$, $k'(x) = 15 \cdot (5x + 1)^2$

$f'(x) = g'(h(k(x)) \cdot h'(k(x)) \cdot k'(x) = 30 \cdot ((5x + 1)^3 + 1) \cdot (5x + 1)^2$

2. Möglichkeit: $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3 + 1$, $k(x) = 5x + 1$.

$g'(x) = 2x$, $h'(x) = 3x^2$, $k'(x) = 5$

$f'(x) = g'(h(k(x)) \cdot h'(k(x)) \cdot k'(x) = 2 \cdot ((5x + 1)^3 + 1) \cdot 3(5x + 1)^2 \cdot 5$

3. Möglichkeit: $f(x) = ((5x + 1)^3 + 1)^2 = (5x + 1)^6 + 2(5x + 1)^3 + 1$ (1. binomische Formel).

$f'(x) = 6 \cdot (5x + 1)^5 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot (5x + 1)^2 \cdot 5 = 30 \cdot (5x + 1)^2 \cdot ((5x + 1)^3 + 1)$

2

a) $(v \circ w)(x) = \cos(3x)$

$(u \circ v)(x) = (\cos(x))^2$

$(u \circ (v \circ w))(x) = u((v \circ w)(x)) = u(v(w(x)) = (\cos(3x))^2$

$((u \circ v) \circ w)(x) = (u \circ v)(w(x)) = (u \circ v)(3x) = u(v(3x)) = u(\cos(3x)) = (\cos(3x))^2$

b) $g(x) = 2^x$, $h(x) = x^2$, $k(x) = 3x$

$(h \circ k)(x) = (3x)^2$

$(g \circ h)(x) = 2^{x^2}$

$l(x) = ((g \circ h) \circ k)(x) = (g \circ h)(k(x)) = (g \circ h)(3x) = g(h(3x)) = g((3x)^2) = 2^{(3x)^2}$

Es gilt hier also $f(x) = (g \circ (h \circ k))(x) = ((g \circ h) \circ k)(x) = l(x)$.

c) $(g \circ (h \circ k))(x) = g((h \circ k)(x)) = g(h(k(x))) = (g \circ h)(k(x)) = ((g \circ h) \circ k)(x)$, also $g \cdot (h \circ k) = (g \circ h) \circ k$

3

a) (A) Die Funktion f mit $f(x) = x + 1$ ist umkehrbar auf $\mathbb{R}$. $\bar{f}(x) = x - 1$.

(B) Die Funktion f mit $f(x) = x^2$ ist umkehrbar auf $\mathbb{R}^+$ (Menge der positiven reellen Zahlen). $\bar{f}(x) = \sqrt{x}$.

(C) Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist umkehrbar auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ (Menge der reellen Zahlen ohne 0). $\bar{f}(x) = \frac{1}{x}$.

(D) Die Funktion f mit $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ist umkehrbar auf der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ (Menge der reellen Zahlen, die größer oder gleich 0 sind). $\bar{f}(x) = x^4$.

(E) Die Funktion f mit $f(x) = 3x - 5$ ist umkehrbar auf $\mathbb{R}$.

$y = 3x - 5$ nach x auflösen: $x = \frac{1}{3}y + \frac{5}{3}$. x und y vertauschen: $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$; $\bar{f}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

(F) Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ ist umkehrbar auf der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$ (Menge der reellen Zahlen, die größer als -1 sind).

$y = \frac{1}{(x+1)^2}$ nach x auflösen: $x = \sqrt{\frac{1}{y}} - 1$. x und y vertauschen: $y = \sqrt{\frac{1}{x}} - 1$; $\bar{f}(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} - 1$.

(G) Die Funktion f mit $f(x) = \frac{3x - 5}{2x - 7}$ ist umkehrbar auf der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3{,}5\}$ (Menge der reellen Zahlen außer 3,5).

$y = \frac{3x - 5}{2x - 7}$ nach x auflösen: $x = \frac{5 - 7y}{3 - 2y}$. x und y vertauschen: $y = \frac{5 - 7x}{3 - 2x}$; $\bar{f}(x) = \frac{5 - 7x}{3 - 2x}$.

(H) Die Funktion f mit $f(x) = -x$ ist umkehrbar auf ganz $\mathbb{R}$. $\bar{f}(x) = -x$

b) Ableitung der linken und rechten Seite der Gleichung $f(\bar{f}(x)) = x$ mit der Kettenregel:

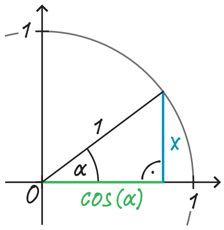
$f'(\bar{f}(x)) \cdot \bar{f}'(x) = 1$, somit $\bar{f}'(x) = \frac{1}{f'(\bar{f}(x))}$.

Autor: Dr. Frieder Haug
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

c) 1. Möglichkeit (mit Potenzregel): $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$; $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.
2. Möglichkeit (mit der Regel für Umkehrfunktionen aus Teilaufgabe b)): Es sei $g(x) = x^2$ mit der Umkehrfunktion $\bar{g}$ mit $\bar{g}(x) = \sqrt{x} = f(x)$ $(x \in \mathbb{R}^+)$ und $g'(x) = 2x$.
Dann gilt $\bar{g}'(x) = \frac{1}{g'(\bar{g}(x))} = \frac{1}{2 \cdot \bar{g}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f'(x)$.

d) $y = f(x)$ ist die Gleichung des Graphen von f. Um die Gleichung des Graphen von $\bar{f}$ zu bestimmen löst man $y = f(x)$ nach x auf. Man erhält zunächst $x = \bar{f}(y)$. Vertauscht man x und y, so erhält man $y = \bar{f}(x)$. Das ist die Gleichung des Graphen von $\bar{f}$. Die Vertauschung von x und y entspricht der Vertauschung der x- und y-Koordinate, d.h. der Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden.

e) Auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ist die Sinusfunktion streng monoton wachsend. Daher ist sie umkehrbar.
Aus der Abbildung ergibt sich $\sin(\alpha) = x$, also $\alpha = \arcsin(x)$. Außerdem gilt $(\cos(\alpha))^2 + x^2 = 1$ und somit $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
Aus der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen ergibt sich
$\bar{f}'(x) = \frac{1}{f'(\bar{f}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
Also gilt $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.



4

a) $f^{(100)}(x) = 0$
b) $f^{(100)}(x) = 0$
c) $f^{(100)}(x) = 0$
d) $f^{(100)}(x) = 0$
e) $f^{(100)}(x) = 100!$
f) $f^{(100)}(x) = 101 \cdot 100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1x = 101! \cdot x$
g) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $f'(x) = -x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$, …, $f^{(100)}(x) = 100! \cdot x^{-101}$
h) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $f'(x) = -2x^{-3}$, $f''(x) = 6x^{-4}$, …, $f^{(100)}(x) = 101! \cdot x^{-102}$
i) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, …, $f^{(100)}(x) = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 197}{2^{100}} \cdot x^{-\frac{199}{2}}$
j) $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \sin(x)$, …, $f^{(100)}(x) = \sin(x)$
k) $f(x) = 5 \cdot \cos(x)$, $f'(x) = -5 \cdot \sin(x)$, $f''(x) = -5 \cdot \cos(x)$, $f^{(3)}(x) = 5 \cdot \sin(x)$, $f^{(4)}(x) = 5 \cdot \cos(x)$, …, $f^{(100)}(x) = 5 \cdot \cos(x)$
l) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$, $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$, $f''(x) = -\sin(x) - \cos(x)$, $f^{(3)}(x) = -\cos(x) + \sin(x)$, $f^{(4)}(x) = \sin(x) + \cos(x)$, …, $f^{(100)}(x) = \sin(x) + \cos(x)$
m) $f^{(100)}(x) = 0$
n) Es ist $f(x) = a x^{100} + g(x)$, g ist ganzrational vom Grad kleiner 100. Es gilt $f^{(100)}(x) = 100! \cdot a$.

5

a) $f^{(100)}(x) = 2^{100} \cdot \sin(2x)$
b) $f^{(100)}(x) = 5^{100} \cdot \sin(-5x)$
c) $f^{(100)}(x) = a^{100} \cdot \cos(2 - ax)$
d) $f^{(100)}(x) = 0$
e) $f^{(100)}(x) = 2^{100} \cdot 100!$
f) $f^{(100)}(x) = 2^{100} \cdot 100!$
g) $f^{(100)}(x) = 2^{100} \cdot 100! \cdot (2x + 1)^{-101}$
h) $f^{(100)}(x) = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 197}{2^{100}} \cdot a^{100} \cdot ax + b^{-\frac{199}{2}}$
i) $f^{(100)}(x) = 101! \cdot a^{100} \cdot (ax + b)^{-102}$

6

a) $f^{(100)}(x) = -100 \cdot \cos(x) + x \cdot \sin(x)$
b) $f^{(100)}(x) = \frac{100}{2^{99}} \cdot \sin(0{,}5x) + \frac{1}{2^{100}} \cdot x \cdot \cos(0{,}5x)$
c) $f^{(100)}(x) = 0$
d) $f^{(100)}(x) = -100! \cdot (x + 1)^{-100} + 100! \cdot x \cdot (x + 1)^{-101} = \frac{100!}{(x + 1)^{100}} \cdot \left(\frac{x}{x + 1} - 1\right)$
e) $f^{(100)}(x) = 2^{100} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
f) $f^{(100)}(x) = 100 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 195}{2^{99}} \cdot (x + 1)^{-\frac{197}{2}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 197}{2^{100}} \cdot x \cdot (x + 1)^{-\frac{199}{2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 195}{2^{99} \cdot \sqrt{(x + 1)^{197}}} \cdot \left(100 - 98{,}5 \cdot \frac{x}{x + 1}\right)$

Autor: Dr. Frieder Haug
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

7

a) $f^{(100)}(x) = e^{-x}$
b) $f^{(100)}(x) = a^{100} \cdot e^{ax}$
c) $f^{(100)}(x) = \frac{1}{2^{100}} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$
d) $f^{(100)}(x) = (100 + x) \cdot e^{x}$
e) $f^{(100)}(x) = 3a^{99}e^{ax}(100 + ax)$
f) $f^{(100)}(x) = -4^{25} \cdot \sin(x) \cdot e^{x}$

8

a) $f^{(100)}(x) = 98! \cdot x^{-99}$
b) $f^{(100)}(x) = 2^{100} \cdot e^{2x} - 99! \cdot x^{-100}$
c) $f^{(100)}(x) = 100! \cdot \left(\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}\right)$

9

a) $f_a'(x) = \frac{1}{x} - a,\ f_a''(x) = -\frac{1}{x^2}$

Mögliche Extremstellen: $f_a'(x) = \frac{1}{x} - a = 0$. Lösung: $x = \frac{1}{a}$.

Überprüfung der möglichen Extremstelle $x = \frac{1}{a}$: $f_a''\left(\frac{1}{a}\right) = -a^2 < 0$, also Maximum.
$f_a\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) - 1 = 0$ für $a = \frac{1}{e}$.

Für $a = \frac{1}{e}$ liegt der Hochpunkt des Graphen von f_a auf der x-Achse.

b) $f_a'(x) = \frac{4}{x} - 2x + 7,\ f_a''(x) = -\frac{4}{x^2} - 2$

Mögliche Extremstellen: $f_a'(x) = \frac{4}{x} - 2x + 7 = 0$. Lösungen: $x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = 4$.
$x_1 = -\frac{1}{2}$ kommt nicht infrage, da die Funktion f hier nicht definiert ist.
Überprüfung der möglichen Extremstelle $x_2 = 4$: $f_a''(4) = -\frac{9}{4} < 0$, also Maximum.
$f_a(4) = 4\ln(4) + 12 + a = 0$ für $a = -12 - 4\ln(4) \approx -17{,}5$.
Für $a \approx -17{,}5$ liegt der Hochpunkt des Graphen von f_a auf der x-Achse.

10

a) Eine Erhöhung von b bewirkt eine Verschiebung des Graphen nach links.
b) $f_b(x) = \ln(x^b) = b \cdot \ln(x)$. Eine Erhöhung von b bewirkt eine Streckung des Graphen in y-Richtung.
c) Eine Erhöhung von b bewirkt eine Stauchung des Graphen in x-Richtung bzw. eine Verschiebung des Graphen um $\ln(b)$ in y-Richtung, da $\ln(bx) = \ln(b) + \ln(x)$ gilt.

11

a) $\int_0^2 f_a(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+2)x^3 + ax^2\right]_0^2 = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}a = 0$, also $a = 1$.

b) $\int_0^2 f_a(x)\,dx = \left[e^{ax} - x\right]_0^2 = e^{2a} - 3 = 0$, also $a = \frac{\ln(3)}{2}$.

c) $\int_0^2 f_a(x)\,dx = \left[\ln(x+1) - ax\right]_0^2 = \ln(3) - 2a = 0$, also $a = \frac{\ln(3)}{2}$.

d) $\int_0^2 f_a(x)\,dx = \left[-\cos(ax)\right]_0^2 = -\cos(2a) + 1 = 0$, also $a = \pi$.

e) $\int_0^2 f_a(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2a = 0$, also $a = \frac{4}{3}$.

f) $\int_0^2 f_a(x)\,dx = \left[-\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}ax^3\right]_0^2 = \frac{2}{3} - \frac{8}{3}a = 0$, also $a = \frac{1}{4}$.

Autor: Dr. Frieder Haug
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

12

a) $F(a) = \int_0^1 f_a(x)\,dx = [a e^{ax} + ax]_0^1 = a e^a$

$F'(a) = e^a \cdot (1 + a)$, $F''(a) = e^a \cdot (2 + a)$

Mögliche Extremstellen: $F'(a) = e^a \cdot (1 + a) = 0$. Lösung: $a = -1$.

Überprüfung der möglichen Extremstelle $a = -1$: $F''(-1) = e^{-1} > 0$, also Minimum.

$\int_0^1 f_a(x)\,dx$ ist minimal für $a = -1$.

b) $F(a) = \int_0^1 f_a(x)\,dx = [a^2x^3 - ax^2]_0^1 = a^2 - a$

$F'(a) = 2a - 1$; $F''(a) = 2$

Mögliche Extremstellen: $F'(a) = 2a - 1 = 0$. Lösung: $a = \frac{1}{2}$.

Überprüfung der möglichen Extremstelle $a = \frac{1}{2}$: $F''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$, also Minimum.

$\int_0^1 f_a(x)\,dx$ ist minimal für $a = \frac{1}{2}$.

c) $F(a) = \int_0^1 f_a(x)\,dx = [x - \sin(ax)]_0^1 = 1 - \sin(a)$

$F'(a) = -\cos(a)$, $F''(a) = \sin(a)$

Mögliche Extremstellen: $F'(a) = -\cos(a) = 0$. Lösung: $a = \frac{\pi}{2}$, da $a \in (0; 2\pi)$.

Überprüfung der möglichen Extremstelle $a = \frac{\pi}{2}$: $F''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$, also Minimum.

$\int_0^1 f_a(x)\,dx$ ist minimal für $a = \frac{\pi}{2}$.

d) $F(a) = \int_0^1 f_a(x)\,dx = [a^2x^3 + 6ax^2 - 7x]_0^1 = a^2 + 6a - 7$

$F'(a) = 2a + 6$; $F''(a) = 2$

Mögliche Extremstellen: $F'(a) = 2a + 6 = 0$. Lösung: $a = -3$.

Überprüfung der möglichen Extremstelle $a = -3$: $F''(-3) = 2 > 0$, also Minimum.

$\int_0^1 f_a(x)\,dx$ ist minimal für $a = -3$.

13

a) Wegen $J_u'(x) = f(x) = \frac{1}{x^2+1} > 0$ ist J_u streng monoton wachsend.

b) Nullstellen:

Es ist $J_u(u) = \int_u^u \frac{1}{t^2+1}dt = 0$, $J_u(x) = \int_u^x \frac{1}{t^2+1}dt > 0$ für $x > u$ $\left(\text{denn } \frac{1}{t^2+1} > 0\right)$ und $J_u(x) = \int_u^x \frac{1}{t^2+1}dt < 0$ für $x < u$.

Daher ist u die einzige Nullstelle von J_u.

Extremstellen:

Es ist $J_u'(x) = f(x) = \frac{1}{x^2+1} > 0$ für alle x. Also hat J_u keine Extremstelle.

Wendestellen:

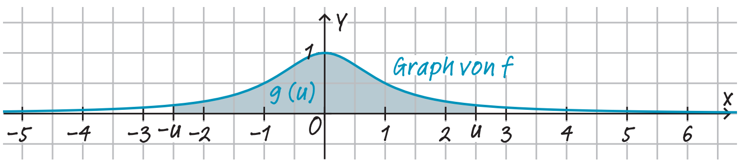
Die Funktion f hat bei $x = 0$ ein Maximum, da der Nenner für $x = 0$ minimal wird. Dies ist einzige Extremstelle von f. Also ist $x = 0$ die einzige Wendestelle von J_u.

c) Wegen $J_u''(x) = f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0$ für $x < 0$ beschreibt der Graph von J_u für $x < 0$ eine Linkskurve.

Wegen $J_u''(x) = f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0$ für $x > 0$ beschreibt der Graph von J_u für $x > 0$ eine Rechtskurve.

d)

(1)



(2) g(u) entspricht für $u > 0$ dem Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall $[-u; u]$. Da diese Fläche oberhalb der x-Achse liegt, nimmt der Flächeninhalt für wachsendes u $(u > 0)$ zu. Damit ist die Funktion g auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend.

(3) $g(-u) = \int_u^{-u} \frac{1}{t^2+1}dt = -\int_{-u}^{u} \frac{1}{t^2+1}dt = -g(u)$. Also ist der Graph von g punktsymmetrisch zum Ursprung.

Autor: Dr. Frieder Haug

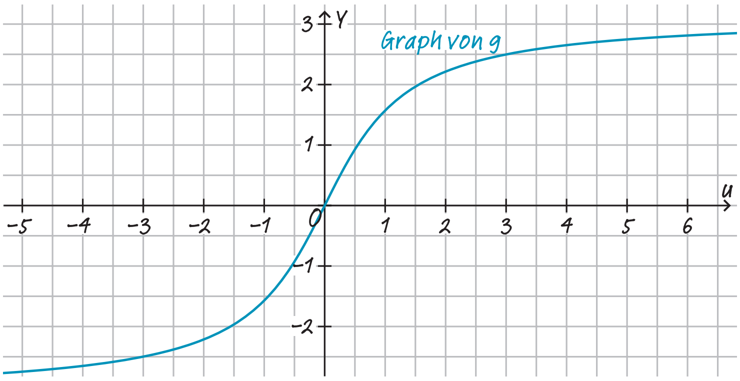
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

(4) Es gilt $\frac{1}{t^2+1} \le \frac{1}{t^2}$ für $|t| \ge 1$ und $\frac{1}{t^2+1} \le 1$ für $|t| \le 1$.

Für $u > 1$ ergibt sich daher

$$g(u) = \int_{-u}^{u} \frac{1}{t^2+1}dt = 2 \cdot \int_{0}^{u} \frac{1}{t^2+1}dt = 2 \cdot \int_{0}^{1} \frac{1}{t^2+1}dt + 2 \cdot \int_{1}^{u} \frac{1}{t^2+1}dt \le 2 \cdot \int_{0}^{1} 1\,dt + 2 \cdot \int_{1}^{u} \frac{1}{t^2}dt = 2 + 2 \cdot \left[-\frac{1}{t}\right]_1^u = 4 - \frac{2}{u} \le 4.$$

(5) Skizze:



14

a) Wegen $J_u'(x) = f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ ist J_u streng monoton wachsend.

b) Nullstellen:

Es ist $J_u(u) = \int_u^u e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0$, $J_u(x) = \int_u^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt > 0$ für $x > u$ $\left(\text{denn } e^{-\frac{t^2}{2}} > 0\right)$ und $J_u(x) = \int_u^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt < 0$ für $x < u$.

Daher ist u die einzige Nullstelle von J_u.

Extremstellen:

Es ist $J_u'(x) = f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ für alle x. Also hat J_u keine Extremstelle.

Wendestellen:

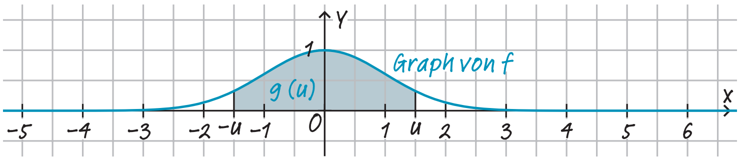
Die Funktion f hat bei $x = 0$ ein Maximum, da der Exponent $-\frac{x^2}{2}$ für $x = 0$ maximal wird. Dies ist die einzige Extremstelle von f. Also ist $x = 0$ die einzige Wendestelle von J_u.

c) Wegen $J_u''(x) = f'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ für $x < 0$ beschreibt der Graph von J_u für $x < 0$ eine Linkskurve.

Wegen $J_u''(x) = f'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}} < 0$ für $x > 0$ beschreibt der Graph von J_u für $x > 0$ eine Rechtskurve.

d)

(1)



(2) $g(u)$ entspricht für $u > 0$ dem Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall $[-u; u]$. Da diese Fläche oberhalb der x-Achse liegt, nimmt der Flächeninhalt für wachsendes u $(u > 0)$ zu. Damit ist die Funktion g auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend.

(3) $g(-u) = \int_u^{-u} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = -\int_{-u}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = -g(u)$. Also ist der Graph von g punktsymmetrisch zum Ursprung.

e) Für $x > 1$ ist $\frac{x^2}{2} > \frac{x}{2}$, also $-\frac{x}{2} > -\frac{x^2}{2}$. Somit gilt $h(x) = e^{-\frac{x}{2}} > e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x)$ für $x > 1$.

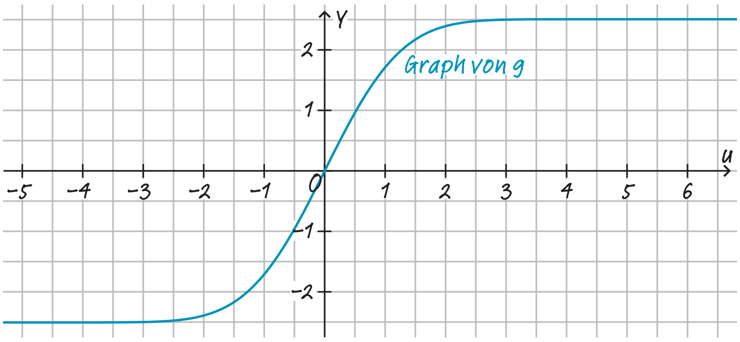
Für $|t| \le 1$ gilt $e^{-\frac{t^2}{2}} \le 1$. Für $u > 1$ ergibt sich daher

$$g(u) = \int_{-u}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 2 \cdot \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 2 \cdot \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}dt + 2 \cdot \int_1^u e^{-\frac{t^2}{2}}dt \le 2 \cdot \int_0^1 1\,dt + 2 \cdot \int_1^u e^{-\frac{t}{2}}dt = 2 + 2 \cdot \left[-2 \cdot e^{-\frac{t}{2}}\right]_1^u$$

$$= 2 - 4 \cdot e^{-\frac{u}{2}} + 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}} \le 2 + \frac{4}{\sqrt{e}}.$$

Autor: Dr. Frieder Haug
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Skizze:



15

a) Es gilt $J_u(u) = \int_u^u f(t)\,dt = 0$. Also ist u Nullstelle von J_u.

b) Wegen $F'(x) = 2x = f(x)$ ist F eine Stammfunktion von f.

1. Möglichkeit: F hat keine Nullstelle. Also kann nach Teilaufgabe a) F keine Integralfunktion von f sein.

2. Möglichkeit: Für jedes u ist $J_u(x) = \int_u^x f(t)\,dt = x^2 - u^2$. Die Gleichung $J_u(x) = F(x)$ ist äquivalent zu $u^2 = -1$.

Diese Gleichung ist nicht lösbar, also F keine Integralfunktion von f.

16

a)

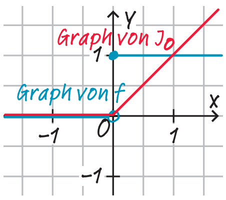
(1) Für x < 0 gilt für den Differenzenquotienten $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$.

Für x > 0 hat der Differenzenquotient $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1 - 0}{x - 0} = \frac{1}{x}$ keinen Grenzwert für $x \to 0$. Daher ist f an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

(2) $J_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 0$ für $x < 0$.

$J_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 1\,dt = x$ für $x \geq 0$.

(3)



(4) Für $x < 0$ gilt für den Differenzenquotienten $\frac{J_0(x) - J_0(0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$.

Für $x > 0$ gilt für den Differenzenquotienten $\frac{J_0(x) - J_0(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x - 0} = 1$.
Somit ist der Grenzwert des Differenzenquotienten bei Annäherung an 0 von links und rechts unterschiedlich. Es existiert kein einheitlicher Grenzwert, d.h., J_0 ist nicht differenzierbar an der Stelle $x = 0$.
Wenn aber J_0 nicht differenzierbar ist, so kann J_0 keine Stammfunktion von f sein.

b)

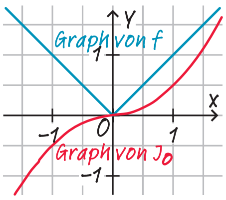
(1) Für $x < 0$ gilt für den Differenzenquotienten $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1$.

Für $x > 0$ gilt für den Differenzenquotienten $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{x}{x} = 1$.
Somit ist der Grenzwert des Differenzenquotientenbei Annäherung an 0 von links und rechts unterschiedlich. Es existiert kein einheitlicher Grenzwert, d.h., f ist nicht differenzierbar an der Stelle $x = 0$.

(2) $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

$J_0(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

Autor: Dr. Frieder Haug
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

(3)


(4) Für $x < 0$ ist $J_0(x) = -\frac{1}{2}x^2$, also $J_0'(x) = -x = f(x)$.

Für $x > 0$ ist $J_0(x) = \frac{1}{2}x^2$, also $J_0'(x) = x = f(x)$.

Für $x < 0$ gilt für den Differenzenquotienten an der Stelle $x = 0$: $\frac{J_0(x) - J_0(0)}{x - 0} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 - 0}{x - 0} = -\frac{1}{2}x$.

Somit gilt für den Grenzwert von links:

$$\lim_{x \to 0,\ x < 0} \frac{J_0(x) - J_0(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0,\ x < 0} -\frac{1}{2}x = 0.$$

Für $x > 0$ gilt für den Differenzenquotienten an der Stelle $x = 0$: $\frac{J_0(x) - J_0(0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 0}{x - 0} = \frac{1}{2}x$.

Somit gilt für den Grenzwert von rechts:

$$\lim_{x \to 0,\ x > 0} \frac{J_0(x) - J_0(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0,\ x > 0} \frac{1}{2}x = 0.$$

Somit ist der Grenzwert des Differenzenquotienten bei Annäherung an 0 von links und rechts beide Mal gleich 0. Es ist $J_0'(0) = 0 = f(0)$. Somit gilt $J_0'(x) = f(x)$ für alle x und daher ist J_0 eine Stammfunktion von f.

17

a) $V = \pi \cdot \int_0^1 (f_c(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 c^2 \cdot \sin(\pi x) dx = \pi c^2 \cdot \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = 2c^2$

Für $c = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}707$ gilt $V = 1$.

b) $V = \pi \cdot \int_0^1 (f_c(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 c \cdot e^{2cx} dx = \pi c \cdot \left[\frac{1}{2c} \cdot e^{2cx}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \cdot (e^{2c} - 1)$

Für $c = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{2}{\pi} + 1\right) \approx 0{,}246$ gilt $V = 1$.

c) $V = \pi \cdot \int_0^1 (f_c(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 c^2x^2(1 - x)^2 dx = \pi c^2 \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \pi c^2 \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{\pi}{30} \cdot c^2$

Für $c = \sqrt{\frac{30}{\pi}} \approx 3{,}090$ gilt $V = 1$.

d) $V = \pi \cdot \int_0^1 (f_c(x))^2 dx = \pi c \cdot \int_0^1 \sin(cx) dx = \pi c \cdot \left[-\frac{1}{c}\cos(cx)\right]_0^1 = \pi \cdot (1 - \cos(c))$

Für $c = \arccos\left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \approx 0{,}821$ gilt $V = 1$.

e) $V = \pi \cdot \int_0^1 (f_c(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 \left(\frac{c}{cx + 1}\right) dx = \pi \cdot [\ln(cx + 1)]_0^1 = \pi \cdot \ln(c + 1)$

Für $c = e^{\frac{1}{\pi}} - 1 \approx 0{,}375$ gilt $V = 1$.

f) $V = \pi \cdot \int_0^1 (f_c(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{cx + 1}\right)^2 dx = \frac{\pi}{c} \cdot [-(cx + 1)^{-1}]_0^1 = \frac{\pi}{c} \cdot \left(1 - \frac{1}{c + 1}\right)$

Für $c = \pi - 1 \approx 2{,}142$ gilt $V = 1$.

18

a) $\int_0^u \frac{5}{(x + k)^2} dx = [-5 \cdot (x + k)^{-1}]_0^u = -\frac{5}{u + k} + \frac{5}{k} \to \frac{5}{k}$ für $u \to \infty$

$\int_0^\infty f_k(x) dx = \frac{5}{k}$

Für $k = 5$ beträgt der Flächeninhalt $1\,cm^2$.

b) $\int_0^u e^{-3kx} dx = \left[-\frac{1}{3k} \cdot e^{-3kx}\right]_0^u = -\frac{1}{3k}e^{-3ku} + \frac{1}{3k} \to \frac{1}{3k}$ für $u \to \infty$

$\int_0^\infty f_k(x) dx = \frac{1}{3k}$

Für $k = \frac{1}{3}$ beträgt der Flächeninhalt $1\,cm^2$.

Autor: Dr. Frieder Haug
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

c) $\int_0^u \frac{1}{(x+1)^k}\,dx = \left[\frac{1}{1-k}\cdot(x+1)^{-k+1}\right]_0^u = \frac{1}{1-k}\cdot(u+1)^{-k+1} - \frac{1}{1-k} \;\to\; \frac{1}{k-1}$ für $u \to \infty$

$\int_0^\infty f_k(x)\,dx = \frac{1}{k-1}$

Für $k = 2$ beträgt der Flächeninhalt $1\,\text{cm}^2$.

d) $\int_0^u \frac{3k-3}{(x+2)^k}\,dx = \left[\frac{3k-3}{1-k}\cdot(x+2)^{-k+1}\right]_0^u = -3\cdot(u+2)^{-k+1} + 3\cdot 2^{1-k} \;\to\; 3\cdot 2^{1-k}$ für $u \to \infty$

$\int_0^\infty f_k(x)\,dx = 3\cdot 2^{1-k}$

Für $k = 1 - \log_2\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 2{,}585$ beträgt der Flächeninhalt $1\,\text{cm}^2$.

19

a) Periode: $p = \pi = \frac{2\pi}{b}$, also $b = 2$.
Amplitude: $|a| = 0{,}5$; $a = 0{,}5$.
Verschiebung in x-Richtung (nach rechts): $c = \frac{\pi}{4}$.
Verschiebung in y-Richtung (nach oben): $d = 0{,}5$.
Möglicher Funktionsterm: $f(x) = \sin^2(x) = 0{,}5\cdot\sin\left(2\cdot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + 0{,}5$.

b) Nach Fig. 1 gilt $\cos(x) = \frac{b}{1} = b$ und $\sin(x) = \frac{d}{1} = d$. Damit erhält man

$\cos(x) = \frac{a}{b} = \frac{a}{\cos(x)}$, also $a = \cos^2(x)$, und $\sin(x) = \frac{c}{d} = \frac{c}{\sin(x)}$, also $c = \sin^2(x)$.

Damit ergibt sich $\cos(2x) = \frac{e}{1} = e = a - c = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

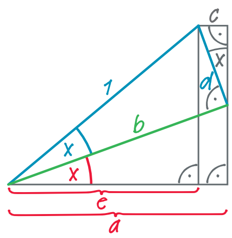


Fig. 1

c) Aus dem rechtwinkligen Dreieck im Einheitskreis (Fig. 2) ergibt sich
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
Somit gilt $1 - \cos(2x) = 1 - (\cos^2(x) - \sin^2(x))$
$= (\sin^2(x) + \cos^2(x)) - (\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 2\cdot\sin^2(x)$.

Folglich ist $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos(2x)$.

Aus $\cos(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ folgt $\cos(2x) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(2\cdot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Daraus ergibt sich $\sin^2(x) = \frac{1}{2}\cdot\sin\left(2\cdot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{1}{2}$.

Das ist der Term aus der Lösung aus Teilaufgabe a).

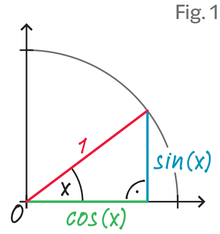


Fig. 2

d) $\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos(2x)\right)dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cdot\sin(2x)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$

20

a) $f_k(x) = \frac{1}{k^3} - x\cdot e^{-kx}$, $f_k'(x) = -e^{-kx} + kx\cdot e^{-kx} = e^{-kx}\cdot(kx - 1)$, $f_k''(x) = ke^{-kx}\cdot(2 - kx)$
Mögliche Extremstellen: $f_k'(x) = e^{-kx}\cdot(kx - 1) = 0$. Lösung: $x = \frac{1}{k}$.
Überprüfung der möglichen Extremstelle $x = \frac{1}{k}$: $f_k''\left(\frac{1}{k}\right) = ke^{-1} < 0$ da $k < 0$, also Maximum.

$h(k) = f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k^3} - \frac{1}{k}\cdot e^{-1}$ ist die „Höhe des Hochpunktes".

$h'(k) = -\frac{3}{k^4} + \frac{1}{k^2}\cdot e^{-1}$, $h''(k) = \frac{12}{k^5} - \frac{2}{k^3}\cdot e^{-1} = \frac{2}{k^3}\cdot\left(\frac{6}{k^2} - \frac{1}{e}\right)$

Mögliche Extremstellen von h: $h'(k) = -\frac{3}{k^4} + \frac{1}{k^2}\cdot e^{-1} = 0$. Lösung: $k = -\sqrt{3e} < 0$.

Überprüfung der möglichen Extremstelle $k = -\sqrt{3e}$: $h''(-\sqrt{3e}) = -\frac{2}{(\sqrt{3e})^3}\cdot\left(\frac{6}{3e} - \frac{1}{e}\right) = -\frac{2}{e(\sqrt{3e})^3} < 0$, also Maximum.
Für $k = -\sqrt{3e}$ liegt der Hochpunkt am höchsten.

b) $f_k(x) = -x^2 + kx + 7k$, $f_k'(x) = -2x + k$, $f_k''(x) = -2$
Mögliche Extremstellen: $f_k'(x) = -2x + k = 0$. Lösung: $x = \frac{k}{2}$.

Überprüfung der möglichen Extremstelle $x = \frac{k}{2}$: $f_k''\left(\frac{k}{2}\right) = -2 < 0$, also Maximum.

$h(k) = f_k\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{k^2}{4} + 7k$ ist die „Höhe des Hochpunktes".

$h'(k) = \frac{k}{2} + 7$, $h''(k) = \frac{1}{2}$

Autor: Dr. Frieder Haug
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5

Mögliche Extremstellen von h: $h'(k) = \frac{k}{2} + 7 = 0$. Lösung: $k = -14$.
Überprüfung der möglichen Extremstelle $k = -14$: $h''(-14) = \frac{1}{2} > 0$, also Minimum.
Für $k = -14$ liegt der Hochpunkt am tiefsten.

21

a) $f_a(x) = \frac{1}{(x+a)^2} + x \cdot \left(\frac{1}{2}x + a\right) + \frac{1}{a}$, $f'_a(x) = -\frac{2}{(x+a)^3} + x + a$, $f''_a(x) = \frac{6}{(x+a)^4} + 1$

Mögliche Extremstellen: $f'_a(x) = -\frac{2}{(x+a)^3} + x + a = 0$. Lösung: $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{2} - a$.

Überprüfung der möglichen Extremstellen $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{2} - a$: $f''_a\left(\pm\sqrt[4]{2} - a\right) = \frac{6}{2} + 1 = 3 > 0$, also Minima.

$h(a) = f_a\left(\pm\sqrt[4]{2} - a\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} - a^2) + \frac{1}{a}$ ist die „Höhe der Tiefpunkte".

$h'(a) = -a - \frac{1}{a^2}$, $h''(a) = -1 + \frac{2}{a^3}$
Mögliche Extremstellen von h: $h'(a) = -a - \frac{1}{a^2} = 0$. Lösung: $a = -1$.
Überprüfung der möglichen Extremstelle $a = -1$: $h''(-1) = -3 < 0$, also Maximum.
Für $a = -1$ liegen die Tiefpunkte des Graphen von f_a am höchsten.

b) Wegen $f_a(0) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$ ist $S_a\left(0 \middle| \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}\right)$ der Schnittpunkt des Graphen von f_a mit der y-Achse.

Es sei $s(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$.

$s'(a) = -\frac{2}{a^3} - \frac{1}{a^2}$, $s''(a) = \frac{6}{a^4} + \frac{2}{a^3}$

Für $a \to -\infty$ strebt $s(a)$ gegen 0, wobei $s(a) < 0$ für $a < -1$ ist.
Für $a \to 0$ strebt $s(a)$ gegen $+\infty$. Die Funktion s muss also ein Minimum haben.
Mögliche Extremstellen von s:
$s'(a) = -\frac{2}{a^3} - \frac{1}{a^2} = 0$. Lösung: $a = -2$.
Überprüfung der möglichen Extremstelle $a = -2$: $s''(-2) = \frac{6}{16} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8} > 0$, also Minimum.
$s(-2) = -\frac{1}{4}$ ist das globale Minimum von s für $a < 0$.
Durch alle Punkte $P(0|y)$ der y-Achse mit $y < -\frac{1}{4}$ verläuft keiner der Graphen einer Funktion f_a.

Autor: Dr. Frieder Haug
Seite zu: Lambacher Schweizer Kursstufe
ISBN-13: 978-3-12-735310-5