(S. 156) **Rückblick** Lösungen der Trainingsaufgaben

A1 ○ Mit $\lambda_{max} = \frac{a}{T} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \cdot \text{K}}{T}$ erhält man $T = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \cdot \text{K}}{500 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} = 5{,}8 \cdot 10^{3}\,\text{K}$.

A2 ○ Es wird angenommen, dass die Temperatur des Körpers unter der Umgebungstemperatur liegt. Der Körper erwärmt sich so lange, bis die Energieaufnahme und Energieabgabe im Gleichgewicht sind und die Temperatur sich nicht mehr ändert.

A3 ◒ **a)** Die Temperatur der „Sonne“ ist gegeben durch:

$$T = \frac{a}{\lambda_{max}} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \cdot \text{K}}{400 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} = 7{,}25 \cdot 10^{3}\,\text{K}$$

Die Strahlungsleistung ergibt sich aus dem Stefan-Boltzmann'schen Gesetz zu:

$$P = \sigma \cdot T^4 \cdot A = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\,\text{K}^4} \cdot (7{,}25 \cdot 10^{3}\,\text{K})^4 \cdot 4\pi \cdot (9 \cdot 10^{8}\,\text{m})^2 = 1{,}5945 \cdot 10^{27}\,\text{W}$$

b) Der Planet befindet sich im Abstand von $r = 10^{11}\,\text{m}$; die Solarkonstante ist also:

$$S = \frac{1{,}5945 \cdot 10^{27}\,\text{W}}{4\pi \cdot (10^{11}\,\text{m})^2} = 12\,698\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

c) Die gesamte Energie, die der Planet je Sekunde aufnimmt, beträgt also:

$$P_{\text{Sonne auf Planet}} = 12\,698\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \pi \cdot (5 \cdot 10^{6}\,\text{m})^2 = 9{,}966 \cdot 10^{17}\,\text{W}$$

Der Planet erwärmt sich so lange, bis er den gleichen Energiebetrag abstrahlt.
Für die dazu notwendige Temperatur gilt:

$$P = \sigma \cdot A \cdot T^4 = 9{,}966 \cdot 10^{17}\,\text{W} = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot 4\pi \cdot (5 \cdot 10^{6}\,\text{m})^2 \cdot T^4$$

$$\Leftrightarrow \quad T = \sqrt[4]{\frac{9{,}966 \cdot 10^{17}\,\text{W}}{5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\text{W}\,\text{m}^{-2}\,\text{K}^{-4} \cdot 4\pi \cdot (5 \cdot 10^{6}\,\text{m})^2}} = 486\,\text{K}$$

Das Ergebnis ist unabhängig von der Größe des Planeten, da sowohl der aufgenommene Energiebetrag, als auch der abgestrahlte Energiebetrag proportional zum Quadrat des Planetenradius wachsen.

A4 ◒ Berechnung der abgestrahlten Leistung eines menschlichen Körpers bei einer Raumtemperatur von 20 °C:
Gegeben:
Haut- bzw. Oberflächentemperatur des Körpers: $\vartheta = 33\,°\text{C} \Rightarrow T_K = 306\,\text{K}$
Körperoberfläche: $A_K = 1{,}4\,\text{m}^2$
Boltzmann-Konstante: $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$

Nach dem Stefan-Boltzmann'schen Gesetz beträgt die abgestrahlte Leistung P_{ab}:

$$P_{ab} = A_K \cdot \sigma \cdot T_K^4$$

$$P_{ab} = 1{,}4\,\text{m}^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot (306\,\text{K})^4$$

$$P_{ab} = 700\,\text{W}$$

Der Körper strahlt demnach 700 W ab, allerdings nimmt er auch Strahlung auf, deren Leistung von der Umgebungstemperatur abhängt. Da von einem idealen Schwarzen Körper ausgegangen wird, nimmt man an, dass der Körper diese Strahlung vollständig absorbiert. Für die aufgenommene Leistung gilt mit $T_U = 293\,\text{K}$:

$$P_{auf} = A_K \cdot \sigma \cdot T_U^4$$

$$P_{auf} = 1{,}4\,\text{m}^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot (306\,\text{K})^4$$

$$P_{auf} = 588\,\text{W}$$

Die Differenz zwischen abgegebener und aufgenommener Strahlungsleistung beträgt demnach

$$\Delta P = P_{ab} - P_{auf} = 700\,\text{W} - 588\,\text{W} = 112\,\text{W} = 112\,\frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Damit beträgt die vom menschlichen Körper in $\Delta t = 24\,\text{h} = 86\,400\,\text{s}$ abgegebene Energie:

$$\Delta E = \Delta P \cdot \Delta t = 112\,\frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 86\,400\,\text{s} = 9\,676\,800\,\text{J} = 9{,}7 \cdot 10^6\,\text{J}$$

Der menschliche Körper gibt innerhalb von 24 h durch Wärmestrahlung eine Energiemenge von $9{,}7 \cdot 10^6\,\text{J}$ ab (dies entspricht etwa 2 400 kcal).