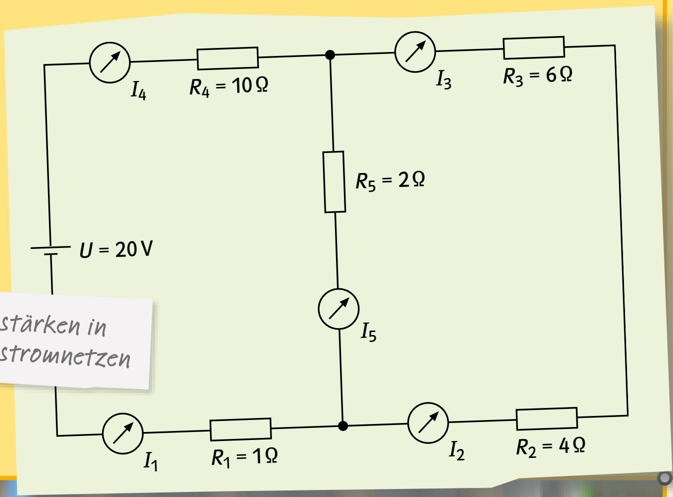
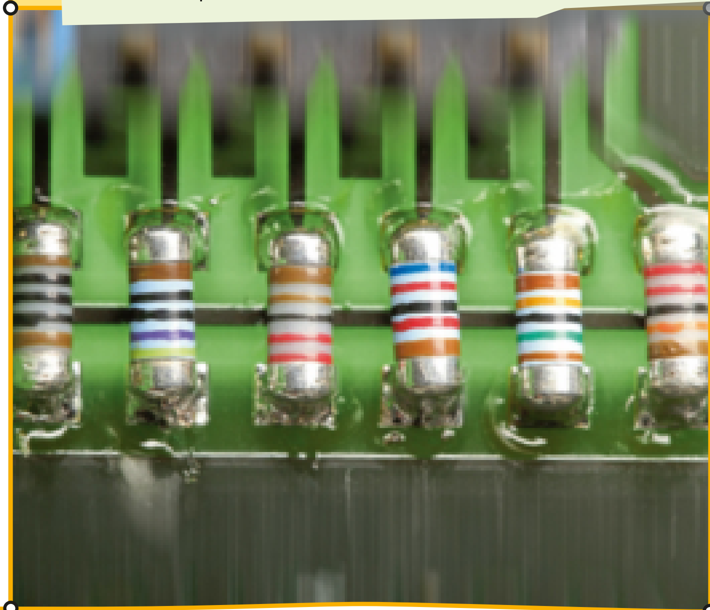
I Lineare Gleichungssysteme



Stromstärken in Gleichstromnetzen

Philipp: Julia und ich sind zusammen 45 Jahre alt.
Julia: Zusammen sind wir 66 Jahre alt.
Anna: Vor 20 Jahren war Philipp dreimal so alt wie ich.



Das können Sie schon

- Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung angeben
- Gleichungssysteme mit zwei Variablen lösen

Check-in

Beherrschen Sie die inhaltlichen Voraussetzungen?

→ Seite 224

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: Alamy stock photo, Abingdon (olaf.kowalzik); Büro für Gestaltung B2, Andreas Staiger, Stuttgart

Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

Das können Sie bald

- Das Gauß-Verfahren zum Lösen von Gleichungssystemen mit drei Variablen anwenden.
- Sachaufgaben mit linearen Gleichungssystemen modellieren

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: iStockphoto, Calgary, Alberta (swissmediavision)

Seite aus: Lambacher Schweizer Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

Lösungen von Gleichungssystemen mit zwei Variablen

Sie kennen verschiedene Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Im Folgenden sind diese Verfahren an verschiedenen Beispiele durchgeführt.
Benennen Sie die Verfahren.
Beschreiben Sie, wie man allgemein bei jedem dieser Verfahren vorgeht.
Überlegen Sie sich Beispiele, in denen jeweils eines der Verfahren vorteilhaft ist.

Beispiel 1

I $7x_1 = 3x_2 + 1$
II $7x_1 = 5x_2 - 3$

$3x_2 + 1 = 5x_2 - 3$
$4 = 2x_2$
$x_2 = 2$
$7x_1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$
$x_1 = 1$
Lösung $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

Beispiel 2

I $x_1 = -2x_2 + 3$
II $x_1 + x_2 = 15$

$(-2x_2 + 3) + x_2 = 15$
$-x_2 + 3 = 15$
$-x_2 = 12$
$x_2 = -12$
$x_1 = -2(-12) + 3 = 27$
Lösung $x_1 = 27$; $x_2 = -12$

Beispiel 3

I $3x_1 + 2x_2 = 7$
II $5x_1 - 2x_2 = 1$

$3x_1 + 2x_2 = 7$
$8x_1 = 8$
$x_1 = 1$
$3 \cdot 1 + 2x_2 = 7$
$2x_2 = 4$
$x_2 = 2$
Lösung $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

Lineare Gleichungen lösen

Carolin, Emil und Samuel haben sich drei Aufgaben ausgedacht. Bestimmen Sie die möglichen Lösungen der Aufgaben.

Carolin: Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich zu der Zahl 5 addiere, erhalte ich dasselbe Ergebnis, wie wenn ich vom Dreifachen der Zahl 3 subtrahiere.

Emil: Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich zu der Zahl 5 addiere und das Ergebnis verdoppele, dann ergibt sich dieselbe Zahl, wie wenn ich die Zahl verdoppele und dann 10 addiere.

Samuel: Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich zu der Zahl 5 addiere und das Ergebnis verdoppele, dann ergibt sich dieselbe Zahl, wie wenn ich die Zahl verdoppele und dann 15 addiere.

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: imprint, Zusmarshausen

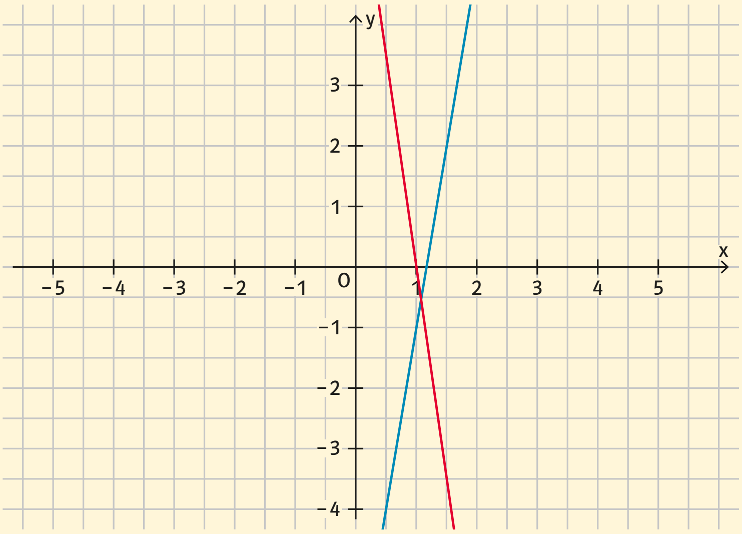
Seite aus: Lambacher Schweizer Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

Den Schnittpunkt zweier Geraden bestimmen

Lesen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden aus der Zeichnung ab und berechnen Sie anschließend seine Koordinaten durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen.

g: $y = 6x - 7$;
h: $y = -7x + 7$

Warum ist eine Rechnung notwendig?



Lösung von Gleichungen mit System

Hasret hat die folgenden linearen Gleichungssysteme gelöst. Nachdem sie fertig war und die Lösung kontrolliert hatte, hat sie ihr Konzeptpapier zerrissen und in den Papierkorb geschmissen. Finden Sie heraus, welche Schnipsel zu welcher Aufgabe gehören und geben Sie für jedes LGS die Lösung an.

Aufgabe 1

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 13 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 3 \\ 5x_2 - 7x_3 &= 8 \\ 3x_2 - 5x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 3 \\ -18x_2 + x_3 &= -17 \\ -38x_3 &= -38 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 19 \\ 10x_1 - 17x_2 + 20x_3 &= 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 3 \\ -18x_2 + x_3 &= -17 \\ -6x_2 + 13x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 3 \\ 5x_2 - 7x_3 &= 8 \\ 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Bei der dritten Aufgabe hat Hasret ein anderes Ergebnis als ihre Nebensitzerin. Hat sie einen Fehler gemacht?

Aufgabe 3

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 15 \\ -5x_1 + x_2 - 2x_3 &= -1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 15 \\ 13x_2 - 11x_3 &= 72 \\ -7x_2 - 7x_3 &= -24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 15 \\ 13x_2 - 11x_3 &= 72 \\ -168x_3 &= 192 \end{aligned}$$

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: imprint, Zusmarshausen; Oehler, Sandra, Remseck

Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

1 Lösen eines linearen Gleichungssystems

Großvater und Enkelin sind zusammen 78 Jahre alt. Vor vier Jahren war der Großvater sechsmal so alt wie seine Enkelin. Wie alt sind sie jeweils heute?

Die bisher bekannten Verfahren (Einsetzungs- und Additionsverfahren) zur Lösung eines linearen Gleichungssystems (LGS) lassen sich auf lineare Gleichungssysteme mit mehr als zwei Variablen übertragen. Mit dem in der Schule verwendeten Taschenrechner kann man die Lösung eines LGS mit drei Gleichungen und drei Variablen bestimmen. Deshalb wird man ein LGS mit mehr als drei Variablen soweit reduzieren, dass es mit dem Taschenrechner lösbar ist.

$$\begin{array}{lrcl}
\mathrm{I} & x_1 - x_3 - x_4 & = & -1 \\
\mathrm{II} & x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 & = & -4 \\
\mathrm{III} & 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = & 5 \\
\mathrm{IV} & 4x_2 - 5x_3 + x_4 & = & -2
\end{array}$$

So kann man z.B. das nebenstehende LGS durch Auflösen der Gleichung IV nach x_4 und Einsetzen in Gleichung I, II und III in ein LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten verwandeln.

$$\mathrm{IVa} \quad x_4 = -4x_2 + 5x_3 - 2$$

$$\begin{array}{lrcl}
\mathrm{Ia} & x_1 - x_3 - (-4x_2 + 5x_3 - 2) & = & -1 \\
\mathrm{IIa} & x_1 + x_2 + 4x_3 - 2(-4x_2 + 5x_3 - 2) & = & -4 \\
\mathrm{IIIa} & 2x_1 - x_2 - x_3 + (-4x_2 + 5x_3 - 2) & = & 5
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\mathrm{Ia} & x_1 + 4x_2 - 6x_3 & = & -3 \\
\mathrm{IIa} & x_1 + 9x_2 - x_3 & = & -8 \\
\mathrm{IIIa} & 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 & = & 7
\end{array}$$

Dieses LGS kann man dann mit dem Taschenrechner lösen oder mit der gleichen Methode in ein LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten reduzieren.

Gibt man in den Taschenrechner die **Koeffizienten**, das sind die Zahlen vor x_1, x_2, x_3, ein, erhält man als Lösung: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0$.
Diese Werte setzt man in IVa ein und erhält $x_4 = 2$.

Um die Lösung eines LGS zu bestimmen, kann man z.B. mithilfe des Einsetzungsverfahrens dieses auf ein LGS mit weniger Gleichungen und weniger Variablen reduzieren. Diese Methode setzt man solange fort, bis man die Lösung des ursprünglichen LGS angeben kann.

Beispiel 1 LGS ohne Taschenrechner lösen
Berechnen Sie die Lösung des LGS.

$$\begin{array}{lrcl}
\mathrm{I} & 2x_1 + 5x_2 & = & 1 \\
\mathrm{II} & x_1 - x_2 - x_3 & = & -1 \\
\mathrm{III} & 10x_2 + 2x_3 & = & 0
\end{array}$$

Lösung
IIIa $x_3 = -5x_2$. Einsetzen in II ergibt: $\begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & 2x_1 + 5x_2 & = & 1 \\ \mathrm{IIa} & x_1 - x_2 + 5x_2 & = & -1 \end{array}$

IIa aufgelöst nach x_1 ergibt IIb $x_1 = -4x_2 - 1$. Eigesetzt in I $-8x_2 - 2 + 5x_2 = 1$;
$-3x_2 - 2 = 1$; $-3x_2 = 3$; $x_2 = -1$. Und damit aus IIb $x_1 = 3$ und aus IIIa $x_3 = 5$.
Die Lösung des LGS lautet (3; −1; 5).

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: iStockphoto, Calgary, Alberta (Martinan)

Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

Beispiel 2 LGS mit Taschenrechner lösen

Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ \text{II} & x_1 - x_3 - 2x_4 = 9 \\ \text{III} & -x_2 + x_3 + 3x_4 = -7 \\ \text{IV} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \end{array}$$

Lösung

III aufgelöst nach x_2 ergibt IIIa $x_2 = x_3 + 3x_4 + 7$ eingesetzt in I und IV ergibt

$$\begin{array}{ll} \text{Ia} & 2x_1 - x_3 - 3x_4 - 7 - x_3 + x_4 = 5 \\ \text{II} & x_1 - x_3 - 2x_4 = 9 \\ \text{IVa} & x_1 + 2x_3 + 6x_4 + 14 - 3x_3 = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Ia} & 2x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 12 \\ \text{II} & x_1 - x_3 - 2x_4 = 9 \\ \text{IVa} & x_1 - x_3 + 6x_4 = -15 \end{array}$$

Der Taschenrechner liefert $x_1 = 4$; $x_3 = 1$; $x_4 = -3$. Eingesetzt in IIIa ergibt $x_2 = -1$.

Die Lösung des LGS lautet (4; −1; 1; −3).

Beispiel 3 Anwendung des Additionsverfahrens

Berechnen Sie die Lösung des LGS.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -x_1 + x_2 + 3x_3 = -6 \\ \text{II} & x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ \text{III} & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{array}$$

Lösung

Man ersetzt II durch die Summe aus I und II, sowie III durch die Summe aus II und III und erhält:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -x_1 + x_2 + 3x_3 = -6 \\ \text{IIa} & 2x_3 = -2 \\ \text{IIIa} & 2x_1 = 10 \end{array}$$

Daraus ergibt sich $x_1 = 5$, $x_3 = -1$. Setzt man diese in I ein, erhält man $x_2 = 2$.

Aufgaben

○ **1** Bestimmen Sie die Lösung des LGS mit dem Taschenrechner.

a) $\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -7x_1 - x_3 = 1 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 - 7x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -1 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 0{,}5x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 5{,}5 \end{array}$

○ **2** Berechnen Sie die Lösung des LGS.

a) $\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \end{array}$

○ **3** Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

a) $\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - x_4 = -4 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} 4x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{array}$

○ Test

Lösung | Seite 231

4 Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

a) $\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 5 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = -2 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_4 = 5 \end{array}$

Text: Detlef Hoche

Seite aus: Lambacher Schweizer Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

5 Nach der Reduktion des LGS auf drei Gleichungen mit drei Variablen berechnet der Taschenrechner die Lösung des reduzierten LGS. Berechnen Sie die Werte der anderen Variablen.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 4x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 \qquad - 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$
TR: $x_1 = 7$; $x_3 = -3$; $x_4 = 6$
$x_2 = ?$

b)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 \qquad &= 4 \\ 5x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= -6 \\ x_1 - 8x_2 - 3x_3 + 2x_4 \qquad &= -3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \qquad + 2x_5 &= -7 \end{aligned}$$
TR: $x_2 = -1$; $x_3 = 4$; $x_4 = -1$
$x_1 = ?$; $x_5 = ?$

6 Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

a)
$$\begin{aligned} 9x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 \qquad - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1 \qquad + x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= -7 \\ x_1 \qquad + x_3 \qquad &= 5 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 6 \\ x_1 \qquad - x_4 \qquad &= -2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Test

Lösung | Seite 231

7 Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 \qquad + x_4 &= 2 \\ 3x_2 + x_3 \qquad &= 7 \\ -x_1 + 3x_2 \qquad - 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 12x_4 &= -9 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 &= 6 \\ 8x_1 + x_2 - 11x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

8 In Julians Heft wurde mit Tinte gekleckert. Nun ist nicht mehr alles lesbar. Schreiben Sie die Rechnung ab und ergänzen Sie die fehlenden Teile.

Bestimmung der Lösung des LGS

I x_1 ... $+ x_3 + 2x_4 = -1$
II $-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6$
III $x_2 - x_4 = 0$
IV $3x_1 - 6x_2 + x_3$ ... $= 3$

Taschenrechner liefert die Lösung
$x_1 = 12$; $x_3 =$ ... $x_4 = 5$

III aufgelöst nach x_2 ergibt x_2 ...
eingesetzt in I, II und IV ergibt
Ia $x_1 + x_3 - x_4 = -$ ...
IIa $-x_1 - x$ ... $_4 = 6$
IVa $3x_1 + x_3 - 5x_4 = 3$

Aus III erhält man: ...
Die Lösung des LGS ist
(12; 5 ...)

Grundwissen Test

Grundwissen
Seite 216
Lösung | Seite 231

9 Vereinfachen Sie den Term.

a) $\frac{a+b}{a^2-b^2}$ b) $3st + 2st^2 - 4t(2s + st)$ c) $\frac{x^2+xy}{y^2+xy}$

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: Malz, Anja, Taunusstein

Seite aus: Lambacher Schweizer Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

2 Das Gauß-Verfahren

Lena und Sven erhalten beim Lösen zweier unterschiedlicher LGS die gleiche Lösung. Hätte man das erkennen können?

Lenas LGS

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Svens LGS

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Der Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777–1855) entwickelte ein Verfahren, das sicher und elegant zur Lösung eines linearen Gleichungssystems führt. Dieses Verfahren ist Grundlage der Lösungsmethode von Taschenrechnern und Computerprogrammen.

Da das nebenstehende LGS in **Stufenform** vorliegt, kann man die Lösung leicht bestimmen: Aus der dritten Gleichung folgt $x_3 = -2$. Anschließend erhält man durch Einsetzen von $x_3 = -2$ aus der zweiten Gleichung $x_2 = 2$ und durch Einsetzen von $x_3 = -2$ und $x_2 = 2$ aus der ersten Gleichung $x_1 = 0$.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -8 \\ 2x_2 + 5x_3 &= -6 \\ -2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Jedes LGS lässt sich durch die folgenden **Äquivalenzumformungen** für lineare Gleichungssysteme in Stufenform umwandeln.

(1) Zwei Gleichungen werden miteinander vertauscht.
(2) Eine Gleichung wird mit einer Zahl $c \neq 0$ multipliziert.
(3) Eine Gleichung wird durch die Summe oder Differenz von ihr und einer anderen Gleichung ersetzt.

Häufig werden bei Umformungen die Äquivalenzumformungen (2) und (3) kombiniert, also ein Vielfaches addiert oder subtrahiert.

Mit dem **Gauß-Verfahren** findet man systematisch die Lösung eines LGS:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 - 3x_2 + 3x_3 &=& -3 \\ \text{II} & 5x_1 - 3x_2 + x_3 &=& 5 \quad \text{IIa} = \text{II} - 5\cdot\text{I} \\ \text{III} & 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &=& 2 \quad \text{IIIa} = \text{III} - 2\cdot\text{I} \end{array}$$

Man entfernt x_1 mithilfe von I aus den anderen Gleichungen. Gibt es kein x_1 in Gleichung I, so vertauscht man diese vorher mit einer Gleichung , in der x_1 vorkommt.

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 - 3x_2 + 3x_3 &=& -3 \\ \text{IIa} & 12x_2 - 14x_3 &=& 20 \\ \text{IIIa} & 4x_2 - 4x_3 &=& 8 \quad \text{IIIb} = 3\cdot\text{IIIa} - \text{IIa} \end{array}$$

Nun entfernt man mithilfe von Gleichung IIa aus IIIa die Variable x_2.

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 - 3x_2 + 3x_3 &=& -3 \\ \text{II} & 12x_2 - 14x_3 &=& 20 \\ \text{III} & 2x_3 &=& 4 \end{array}$$

Die Lösung erhält man aus dieser Stufenform und gibt sie als sogenanntes 3-Tupel in der Form $(x_1; x_2; x_3)$ an: (3; 4; 2).

Für die Lösung eines LGS kann man auch diese Form als Stufenform betrachten:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Das vorgestellte Verfahren lässt sich auf LGS mit n Variablen übertragen.

Gauß-Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme mit n Variablen

1. Man eliminiert mithilfe einer Gleichung durch Äquivalenzumformungen die Variable x_1 aus allen anderen Gleichungen.
2. Mit den restlichen Gleichungen verfährt man nun schrittweise genauso für die Variablen $x_2, x_3, \dots x_n$.
3. Man löst die Gleichungen der Stufenform schrittweise nach den Variablen $x_n, \dots, x_2, x_1$ auf.

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: Malz, Anja, Taunusstein; stock.adobe.com, Dublin (nickolae)

Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

Um Schreibarbeit zu sparen, kann man ein lineares Gleichungssystem in Kurzform angeben.
Dabei notiert man in jeder Zeile nur noch die Koeffizienten und die Zahl auf der rechten Seite.
Dieses Zahlenschema bezeichnet man als **Matrix**.

LGS

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5 \\ -2x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Matrixschreibweise

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 10 \\ 5 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

Erinnerung:
Die Faktoren vor den Variablen heißen Koeffizienten.

Beispiel 1 LGS mit dem Gauß-Verfahren lösen

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 1{,}5x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= -9 \end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4 & \\ \text{II} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 & \text{IIa} = \text{I} - \text{II} \\ \text{III} & 1{,}5x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -9 & \text{IIIa} = \text{I} - 2\cdot\text{III} \end{array}$$

(1) Damit x_1 in den Gleichungen II und III „wegfällt“, ersetzt man II durch die Differenz aus I und II und III durch die Differenz aus I und 2 · III.

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4 & \\ \text{IIa} & 4x_2 - 3x_3 = -4 & \\ \text{IIIa} & -4x_2 + 8x_3 = 14 & \text{IIIb} = \text{IIIa} + \text{IIa} \end{array}$$

(2) Damit x_2 in der Gleichung IIIa „wegfällt“, ersetzt man IIIa durch die Summe von IIIa und IIa.

$$\begin{array}{lr} \text{I} & 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4 \\ \text{IIa} & 4x_2 - 3x_3 = -4 \\ \text{IIIb} & 5x_3 = 10 \end{array}$$

(3) Man bestimmt die Lösung aus der Stufenform:
$x_3 = 2$, $x_2 = 0{,}5$ und $x_1 = -1$.
Lösung: $(-1; 0{,}5; 2)$.

Beispiel 2 LGS in Matrixschreibweise lösen

Lösen Sie das in Matrixschreibweise gegebene lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 19 \\ 4 & 0 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

Lösung

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 19 \\ 4 & 0 & 3 & -5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \text{IIa} = 2\cdot\text{I} - 5\cdot\text{II} \\ \text{IIIa} = \text{III} - 2\cdot\text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{IIa} \\ \text{IIIa} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 24 & -87 \\ 0 & -2 & 11 & -43 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{IIIb} = 2\cdot\text{IIa} - 3\cdot\text{IIIa} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{IIa} \\ \text{IIIb} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 24 & -87 \\ 0 & 0 & 15 & -45 \end{array}\right)$$

Lösung: $(1; 5; -3)$.

Man muss nicht immer die Gleichung I verwenden, um zu eliminieren. Hier wird im ersten Schritt die Gleichung II verwendet.

Beispiel 3 LGS geschickt lösen

Bestimmen Sie die Lösung des gegebenen linearen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{lr} \text{I} & 2x_2 + x_3 = 3 \\ \text{II} & x_2 = 4 \\ \text{III} & x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{array}$$

Lösung

Man kann die Lösung direkt ablesen. Aus II erhält man $x_2 = 4$; dies in I eingesetzt, ergibt $x_3 = -5$ und beide Werte in Gleichung III eingesetzt ergibt $x_1 = -1$.
Die Lösung lautet also $(-1; 4; -5)$.

Dieses LGS kann man auch als eine Stufenform betrachten:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + 3x_2 &= 1 \\ x_3 + 2x_2 &= 3 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Text: Detlef Hoche

Seite aus: Lambacher Schweizer Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

Aufgaben

○ **1** Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 &= -1 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_3 &= 6 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 3x_1 + 8x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 4x_2 + x_3 &= 1 \\ -5x_3 &= 10 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 5 \\ 17x_2 + 24x_3 &= 16 \\ 2x_3 &= 7 \end{aligned}$

○ **2** Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 14 \\ 7x_2 + x_3 &= 0 \\ 7x_2 - x_3 &= -14 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_3 &= -6 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 8 \\ 6x_2 + x_3 &= -2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 6 \end{aligned}$

○ **3** Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= -7 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 6x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &= 7 \\ 2x_1 - x_3 &= 8 \end{aligned}$

○ **4** Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

a) $\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 13 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} -x_1 + 7x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 0{,}5x_2 + 0{,}2x_3 &= 0 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 + x_3 &= -3 \\ 0{,}9x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}5x_3 &= -1 \end{aligned}$

○ **5** Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 10 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -4 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & -1 \end{array}\right)$

○ **6** Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & -3 & 4 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & -12 \\ -3 & -4 & 2 & 10 \\ 7 & 1 & 0 & 23 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 2 & 4 & 6 \\ -5 & -4 & 8 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

Lösungen zu den Aufgaben 1 bis 3:

$(1; -1; 7)$, $\left(0; -4; \frac{7}{2}\right)$, $(3; -1; 2)$, $\left(-\frac{7}{3}; \frac{3}{4}; -2\right)$, $(1; -1; 0)$, $(5; 1; 2)$, $(4; 1; -3)$, $(2; 3; -1)$, $(5; 0; -2)$

Vorsicht: Manches LGS sieht aus wie eine Stufenform, ist aber keine!

$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 &= 3 \end{aligned}$

○ Test

→ Lösungen | Seite 231

7 Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 4x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 10x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 5x_3 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$

8 Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right)$ **b)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}5 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 12 & 1 \\ 1{,}5 & -1 & -11 & 20 \end{array}\right)$ **c)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 3{,}5 & -1 & -2 \\ 7 & -2 & 1 & 21 \\ -11 & 3 & 2 & 17 \end{array}\right)$

◒ **9** Welche Fehler wurden bei der Umformung des LGS gemacht?

a)

$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 3x_1 + 5x_3 &=& 5 \\ \text{II} & 3x_1 + x_2 - 5x_3 &=& 7 \\ \text{III} & -3x_1 + x_2 - 8x_3 &=& 4 & \quad \text{IIIa} = \text{III} + \text{I} \end{array}$

$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 3x_1 + 5x_3 &=& 5 \\ \text{II} & 3x_1 + x_2 - 5x_3 &=& 7 \\ \text{IIIa} & -3x_3 &=& 9 \end{array}$

b)

$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &=& 0 \\ \text{II} & x_2 + 3x_3 &=& 4 & \quad \text{IIa} = \text{II} - \text{III} \\ \text{III} & x_2 - x_3 &=& 0 & \quad \text{IIIa} = \text{III} - \text{II} \end{array}$

$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &=& 0 \\ \text{IIa} & 4x_3 &=& 4 \\ \text{IIIa} & -4x_3 &=& -4 \end{array}$

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: Malz, Anja, Taunusstein

Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

10 Sarah hat folgendes LGS gelöst. Raphael behauptet, das LGS mit weniger Rechenschritten lösen zu können. Nehmen Sie Stellung, was er meint.

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 9 & \\ \text{II} & x_1 - 8x_2 \quad = 9 & \text{IIa} = \text{I} - \text{II} \\ \text{III} & 12x_2 \quad = -12 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 9 & \\ \text{IIa} & 12x_2 - 4x_3 = 0 & \\ \text{III} & 12x_2 \quad = -12 & \text{IIIa} = \text{IIa} - \text{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 9 \\ \text{IIa} & 12x_2 - 4x_3 = 0 \\ \text{IIIa} & -4x_3 = 12 \end{array}$$

$x_3 = -3;\ x_2 = -1;\ x_1 = 1$

Lösung: $(1; -1; -3)$

11 Geben Sie ein LGS an, bei dem alle Koeffizienten von null verschieden sind und das die angegebene Lösung hat.

a) $(1; 2; 3)$ b) $(-2; 5; 1)$ c) $(1; 1; 1)$ d) $(0; 3; 6)$

Test

Lösung | Seite 231

12 Bestimmen Sie die Lösung des LGS.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 4x_2 + x_3 &= -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= -4 \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= -11 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= -2 \\ x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$

13 Ist die Aussage wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.
Die Aufzählung der Äquivalenzumformungen auf Seite 13 könnte man durch eine gleichwertige Aufzählung ersetzen, wenn man

a) die Nummer (3) ersetzt durch: „Eine Gleichung wird durch die Summe von ihr und einer anderen Gleichung ersetzt.“,
b) die Nummer (2) weglässt,
c) die Nummern (2) und (3) ersetzt durch „Eine Gleichung wird durch die Summe eines Vielfachen von ihr (Faktor ≠ 0) und eines Vielfachen einer anderen Gleichung ersetzt.“,
d) zusätzlich in Teilaufgabe c) den Faktor Null zulässt und die Nummer (1) weglässt.

14 Gegeben ist das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4 \\ \text{II} & 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ \text{III} & -5x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{array}$$

a) Ersetzen Sie in dem linearen Gleichungssystem die Gleichung II durch die Summe aus einem Vielfachen der ersten Gleichung und einem Vielfachen der zweiten Gleichung, sodass die Variable x_1 wegfällt.
b) Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems.
c) Schreiben Sie das Gleichungssystem in Matrixform und formen Sie die Matrix durch Äquivalenzumformungen so um, dass in jeder Zeile genau eine Null steht.
d) Miriam hat Gleichung I durch die Summe von Gleichung II und III ersetzt. Erklären Sie, wie sich dieser Schritt auf die Lösung des Gleichungssystems auswirkt.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -2x_1 = -2 \\ \text{II} & 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ \text{III} & -5x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{array}$$

Grundwissen Test

Grundwissen
Seite 216
Lösung | Seite 231

15 Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $\frac{3}{x^2} = \frac{2}{x}$ b) $x + 2 = \frac{3}{x}$ c) $\frac{2}{x} + \frac{6}{x^3} = \frac{7}{x^2}$

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: Malz, Anja, Taunusstein

Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

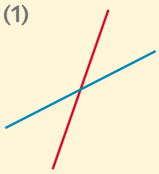
3 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

A $\begin{array}{ll} \text{I} & y = -x + 1 \\ \text{II} & 2x + 2y = 2 \end{array}$

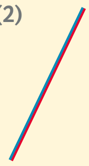
B $\begin{array}{ll} \text{I} & y = -x + 1 \\ \text{II} & x + y = 2 \end{array}$

C $\begin{array}{ll} \text{I} & y = -x + 1 \\ \text{II} & x - 2y = 1 \end{array}$

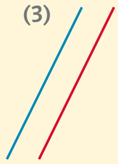
(1)



(2)



(3)



Ordnen Sie die linearen Gleichungssysteme den passenden Abbildungen zu.

Wie bei linearen Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen und zwei Variablen können auch bei LGS mit mehr als zwei Gleichungen und Variablen nur folgende drei Fälle auftreten: Das LGS hat entweder genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Die jeweiligen Lösungen fasst man in der **Lösungsmenge** zusammen.

1. Fall: Das LGS hat **genau eine Lösung**.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ \text{II} & -2x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \\ \text{III} & x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ \text{IIa} & 3x_2 + 7x_3 = 23 \\ \text{IIIa} & -3x_2 + 2x_3 = -5 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ \text{IIa} & 3x_2 + 7x_3 = 23 \\ \text{IIIb} & 9x_3 = 18 \end{array}$$

An der Stufenform erkennt man:
Aus IIIb folgt $x_3 = 2$; aus IIa ergibt sich $x_2 = 3$ und aus I erhält man $x_1 = 1$.
Da das LGS in Stufenform dieselbe Lösungsmenge L wie das angegebene LGS hat, gilt in diesem Fall $L = \{(1;\ 3;\ 2)\}$.

2. Fall: Das LGS hat **keine Lösung**.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ \text{II} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ \text{III} & 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 5 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ \text{IIa} & 7x_2 + 7x_3 = -2 \\ \text{IIIa} & -7x_2 - 7x_3 = -2 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ \text{IIa} & 7x_2 + 7x_3 = -2 \\ \text{IIIb} & 0x_3 = -4 \end{array}$$

An der Stufenform erkennt man:
Die Gleichung IIIb hat keine Lösung; damit hat das gegebene LGS keine Lösung. Die Lösungsmenge L ist leer: $L = \{\ \}$.

3. Fall: Das LGS hat **unendlich viele Lösungen.**

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ \text{II} & 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ \text{III} & 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 14 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ \text{IIa} & -5x_2 + 10x_3 = -10 \\ \text{IIIa} & -5x_2 + 10x_3 = -10 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ \text{IIa} & -5x_2 + 10x_3 = -10 \\ \text{IIIb} & 0x_3 = 0 \end{array}$$

An der Stufenform erkennt man:
Die Gleichung IIIb ist für jeden Wert von x_3 erfüllt. Zum Beispiel erhält man für $x_3 = 1$ die Lösung (1; 4; 1).
Allgemein berechnet man zu einer gegebenen Zahl $x_3 = t$ die Lösung aus der Stufenform so:
Aus IIa erhält man $x_2 = 2 + 2t$ und aus I dann $x_1 = 6 - 2x_2 + 3t = 2 - t$. Das gegebene LGS hat unendlich viele Lösungen. Lösungsmenge: $L = \{(2 - t;\ 2 + 2t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Man bestimmt die **Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems**, indem man es durch Äquivalenzumformungen in Stufenform bringt.
- Entsteht dabei eine Gleichung, die keine Lösung hat, so ist die Lösungsmenge leer.
- Kann man für eine Variable einen Parameter einführen, so gibt es unendlich viele Lösungen.
- In allen anderen Fällen kann man durch Rückwärtseinsetzen genau eine Lösung bestimmen.

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: Malz, Anja, Taunusstein

Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

Man könnte vermuten, dass man die Art der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems außer an der Stufenform auch durch Vergleichen der Anzahl der Variablen mit der Anzahl der Gleichungen des LGS erkennen kann. Dies ist nur eingeschränkt möglich, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Das LGS hat weniger Gleichungen als Variablen.

(1) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 + x_3 = 2$
Keine Lösung.

(2) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
Unendlich viele Lösungen.

Bei weniger Gleichungen als Variablen sagt man auch: Das LGS ist **unterbestimmt**.

Das LGS hat mehr Gleichungen als Variablen.

(1) $x_1 + x_2 = 1$
$x_1 + x_2 = 2$
$x_1 + x_2 = 3$
Keine Lösung.

(2) $x_1 + x_2 = 1$
$x_1 - x_2 = 1$
$2x_1 + x_2 = 2$
Genau eine Lösung: (1; 0).

(3) $x_1 + x_2 = 1$
$2x_1 + 2x_2 = 2$
$3x_1 + 3x_2 = 3$
Unendlich viele Lösungen.

Bei mehr Gleichungen als Variablen sagt man auch: Das LGS ist **überbestimmt**.

Beispiel Unendlich viele Lösungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS mit dem Gauß-Verfahren.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ \text{II} & x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ \text{III} & 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 \end{array}$$

Lösung

Überführung des LGS mit dem Gauß-Verfahren in Stufenform.

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 & \\ \text{II} & x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 & \text{IIa} = \text{II} - \text{I} \\ \text{III} & 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 12 & \text{IIIa} = \text{III} - 2\cdot\text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 & \\ \text{IIa} & x_2 + x_3 = 2 & \\ \text{IIIa} & x_2 + x_3 = 2 & \text{IIIb} = \text{IIIa} - \text{IIa} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ \text{IIa} & x_2 + x_3 = 2 \\ \text{IIIb} & 0 = 0 \end{array}$$

Man setzt z.B. für $x_3 = t \in \mathbb{R}$ und löst nach den anderen Variablen auf.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 + t = 5 \\ \text{IIa} & x_2 + t = 2 \\ \text{IIIb} & 0 = 0 \end{array}$$

$x_2 = 2 - t$; $x_1 = 1 + t$. Also ist die Lösungsmenge
$L = \{(1 + t;\ 2 - t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Aufgaben

○ **1** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) $2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1$
$5x_2 + 2x_3 = 16$
$3x_3 = 9$

b) $12x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 7$
$7x_2 - 3x_3 = 1$
$0 \cdot x_3 = -2$

c) $2x_1 - 4x_2 - x_3 = 2$
$3x_2 - 6x_3 = 6$
$0 \cdot x_3 = 0$

○ **2** Das LGS hat unendlich viele Lösungen. Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $2x_1 + x_2 + x_3 = 3$
$x_2 - x_3 = 1$

b) $x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$
$2x_2 - 4x_3 = 1$
$3x_2 - 6x_3 = \frac{3}{2}$

c) $x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4$
$x_1 = 4$

○ **3** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5$
$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 8$
$2x_3 = 6$

b) $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$
$4x_2 - 3x_3 = 6$
$2x_1 + 4x_2 = 10$

c) $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1$
$3x_1 + x_2 - 5x_3 = 7$
$4x_1 + 5x_2 - 14x_3 = 13$

Lösungen zu Aufgabe 3:

$L = \{(1; -1; 3)\}$

$L = \{(2 + t;\ 1 + 2t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$L = \{(2 - 6t;\ 3t + 1{,}5;\ 4t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Text: Detlef Hoche

Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

○ **4** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

○ **5** Ein LGS hat die Lösungsmenge $L = \{(5 + 3t;\ 2 - 2t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Ist das 3-Tupel Lösung des LGS?

a) (8; 0; 1) b) (2; 4; 2) c) (−1; 2; −2) d) (5; 2; 0) e) (−4; 6; −3) f) (6,5; 1; 0,5)

Test

Lösungen | Seite 231

6 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 7x_3 &= 12 \\ 5x_1 + 10x_3 &= 5 \\ -x_1 - 2x_2 &= -2 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= -5 \\ 6x_1 + 3x_2 &= -9 \end{aligned}$

7 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 10 & 12 \end{array}\right)$ **b)** $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 9 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 8 \end{array}\right)$ **c)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -6 & 5 \\ 7 & 3 & 3 & 10 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$

◒ **8** Geben Sie ein LGS mit drei Gleichungen und drei Variablen an, das die folgende Lösungsmenge hat und bei dem alle Koeffizienten von null verschieden sind.

a) $L = \{\ \}$ b) $L = \{(3t;\ 2t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ c) $L = \{(5;\ t;\ t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

◒ **9** Ist die Aussage wahr oder falsch? Geben Sie ein Gegenbeispiel an, wenn die Aussage falsch ist.

a) Jedes LGS mit drei Variablen und zwei Gleichungen hat unendlich viele Lösungen.
b) Jedes LGS mit zwei Variablen und drei Gleichungen besitzt keine Lösung.
c) Jedes LGS mit der gleichen Anzahl von Variablen und Gleichungen besitzt genau eine Lösung.

◒ **10** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) $\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= -1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 7 \\ -x_1 + x_2 &= -3 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 6x_1 + x_2 + x_3 &= 30 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}$

◒ **11** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) $\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 &= -1 \\ x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 5 \\ 2x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$

◒ **12** Tobias zweifelt die Vorteile des Gauß-Verfahrens an. Er findet das Einsetzungsverfahren genauso gut und überlegt:
„Als Erstes löse ich eine der Gleichungen nach x_1 auf und setze dann x_1 in die anderen Gleichungen ein. Damit habe ich x_1 aus diesen Gleichungen eliminiert. Nun verfahre ich mit den restlichen Gleichungen und den anderen Variablen genauso. Insgesamt erhalte ich auch so die Stufenform."

a) Entwerfen Sie ein LGS mit zwei Gleichungen und zwei Variablen, mit dem Sie zeigen können, dass das Gauß-Verfahren zu einer einfacheren Rechnung führt als das Einsetzungsverfahren.
b) Untersuchen Sie für ein LGS mit zwei Gleichungen und zwei Variablen, ob das Einsetzungsverfahren auch bei LGS mit einer leeren Lösungsmenge bzw. mit unendlich vielen Lösungen funktioniert.

Text: Detlef Hoche

Seite aus: Lambacher Schweizer Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

Test

Lösungen | Seite 231

13 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 6 & 5 \\ 5 & -2 & 0 & 8 \end{array}\right)$ **b)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$ **c)** $\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$

14 Geben Sie ein LGS mit drei Gleichungen und drei Variablen an, das die folgende Lösungsmenge hat und bei dem in jeder Zeile mindestens zwei Koeffizienten von null verschieden sind.

a) $L = \{(t+1;\ t-1;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ **b)** $L = \{(0;\ -t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ **c)** $L = \{(3;\ t-1;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

● **15** Zeigen Sie, dass (3; 1; 0) und (3; 2; 1) Lösungen des LGS $\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &=& 5 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &=& -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &=& 5 \end{array}$ sind.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung durch Einführen eines Parameters t, ohne das LGS in Stufenform zu bringen, und weisen Sie durch Einsetzen nach, dass dies die allgemeine Lösung ist.

● **16** Auf einem Bauernhof gibt es viele Tiere. Neben anderen Tieren gibt es zusammen 75 Ziegen, Hühner und Gänse, die insgesamt 230 Beine und 70 Flügel haben.
Stellen Sie aus diesen Angaben ein LGS auf und bestimmen Sie die Lösungsmenge.
Begründen Sie, warum das LGS zwar unendlich viele Lösungen hat, die Aufgabe aber nicht.

● **17** Das Gleichungssystem $\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 &=& 1 \\ -x_1 + 3x_2 &=& 9 \end{array}$ kann sowohl als LGS mit zwei als auch mit drei Variablen interpretiert werden. Vergleichen Sie die Lösungen für diese Fälle. Gibt es Überschneidungen?

● **18** Man kann auch eine einzige Gleichung als LGS auffassen. Um das zu verdeutlichen, fügt man in der Stufenform entsprechend viele Gleichungen hinzu, die immer erfüllt sind. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) $\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - 5x_3 &=& 1 \\ 0 \cdot x_2 &=& 0 \\ 0 \cdot x_3 &=& 0 \end{array}$ b) $x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2$ c) $-2x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$

● **19** Gegeben ist ein LGS in Matrixform in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & r+2 & r-2 & 8 \\ 1 & 1 & r-1 & 2 \\ 1 & r & r-2 & 4 \end{array}\right)$.

a) Zeigen Sie, dass das LGS für $r = 1$ genau eine Lösung hat.
b) Zeigen Sie, dass das LGS für $r = 0$ keine Lösung hat.
c) Zeigen Sie, dass das LGS für $r = 2$ unendlich viele Lösungen hat, und geben Sie diese in Abhängigkeit eines Parameters t an.
d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des LGS in Abhängigkeit vom Parameter r.

Grundwissen Test

Grundwissen
Seite 216
Lösung | Seite 231

20 Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $\frac{x}{x-1} = 5$ **b)** $\frac{4x-1}{3x+5} = 2$ **c)** $\frac{2x^2-1}{2x-3} = x - 2$

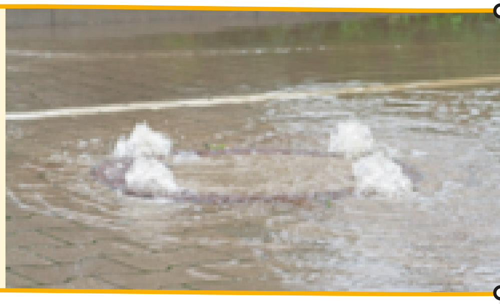
d) $\frac{x}{x-3} = x - 4$ **e)** $\frac{x^2+2x}{x+2} = x$ **f)** $\frac{3x}{x+1} = \frac{2x-1}{x+1}$

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: IMAGO, Berlin (blickwinkel)

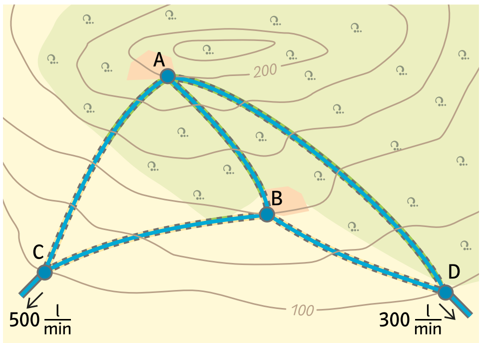
Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

4 Anwendung linearer Gleichungssysteme

Die sorgfältige Planung von Abwassersystemen wird in Zeiten des Klimawandels immer wichtiger. Leiten mehrere Rohre das Abwasser ab, dann verteilt sich dieses nach bestimmten Kriterien auf die Rohre. Überlegen Sie, welche Kriterien dies sein könnten.



In Bereichen wie Technik, Naturwissenschaften und Wirtschaftswissenschaften gibt es Probleme, die man mithilfe linearer Gleichungssysteme lösen kann. Das folgende Beispiel zeigt, wie man dabei vorgehen kann.
Bei der Planung eines Abwassersystems im Gelände muss man berücksichtigen, dass das Wasser dem natürlichen Gefälle entlang fließt.
In den Punkten A und B auf der Karte mit Höhenlinien fließt Wasser in ein unterirdisches Abwassersystem hinein und gelangt über insgesamt 5 Leitungen zu den Punkten C und D, wo 500 l/min bzw. 300 l/min abfließen. In A fließen 600 l/min und in B 200 l/min in das Abwassersystem. Wegen des unterschiedlichen Gefälles fließt von A nach D und von A nach C jeweils doppelt so viel Wasser wie von A nach B. Bestimmen Sie die Verteilung des Wasserflusses auf die Leitungen.



1. Festlegen von Variablen für die gesuchten Größen
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sind die Wasserströme in den Rohren AB, AC, AD, BC und BD.

2. Aufstellen des LGS
Für jeden Verzweigungspunkt ergibt sich eine Gleichung:

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\text{A: I} & x_1 & +\,x_2 & +\,x_3 & & & = 600 \\
\text{B: II} & -x_1 & & & +\,x_4 & +\,x_5 & = 200 \\
\text{C: III} & & x_2 & & +\,x_4 & & = 500 \\
\text{D: IV} & & & x_3 & & +\,x_5 & = 300
\end{array}$$

Hinzu kommen: V $x_2 = 2x_1$ und
VI $x_3 = 2x_1$

3. Lösen des LGS
Die Gleichung von IV ist überflüssig. Sie ergibt sich aus I + II − III. Durch Einsetzen von $x_2 = 2x_1$ und $x_3 = 2x_1$ ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll}
\text{Ia} & 5x_1 = 600 \\
\text{IIa} & -x_1 + x_4 + x_5 = 200 \\
\text{IIIa} & 2x_1 + x_4 = 500
\end{array}$$

Daraus erhält man die Lösungsmenge $L = \{120; 240; 240; 260; 60\}$.

4. Interpretation der Lösungsmenge
Das Wasser verteilt sich aufgrund des Gefälles so, dass von A nach B 120 l/min, von A nach C und von A nach D jeweils 240 l/min, von B nach C 260 l/min und von B nach D 60 l/min fließen.

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: iStockphoto, Calgary, Alberta (kerkla); Uwe Alfer, Kråksmåla
Seite aus: Lambacher Schweizer Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

Vorgehensweise beim Lösen von Anwendungsaufgaben mithilfe linearer Gleichungssysteme:
1. Für jede gesuchte Größe eine Variable festlegen.
2. Aufstellen des zugehörigen Gleichungssystems.
3. Lösen des linearen Gleichungssystems.
4. Interpretation der Lösungsmenge.

Beispiel Anwendung

Für Düngeversuche soll aus drei Düngesorten, die jeweils unterschiedliche Mengen an Kalium, Stickstoff und Phosphor enthalten, eine neue Mischung hergestellt werden. Wie viel Kilogramm von A, B und C muss 1 kg der Mischung enthalten, wenn sie 40 % Kalium, 35 % Stickstoff und 25 % Phosphor enthalten soll?

	A	B	C
Kalium	40 %	30 %	50 %
Stickstoff	50 %	20 %	30 %
Phosphor	10 %	50 %	20 %

Fig. 1

Lösung

1. Durch Einführen von Variablen lassen sich die beschriebenen Abhängigkeiten mit Gleichungen beschreiben.

x_1: Menge von A in kg
x_2: Menge von B in kg
x_3: Menge von C in kg

2. Man erhält folgende Gleichungen:

1 kg der Mischung enthält 0,4 kg Kalium — I $0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}5x_3 = 0{,}4$
1 kg der Mischung enthält 0,35 kg Stickstoff — I $0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 = 0{,}35$
1 kg der Mischung enthält 0,25 kg Phosphor — III $0{,}1x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}2x_3 = 0{,}25$

3. Lösung des LGS:

$$\begin{array}{llll} \text{I} & 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}5x_3 = 0{,}4 & & \text{Ia} = \text{I} - 4\cdot\text{III} \\ \text{II} & 0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 = 0{,}35 & & \text{IIa} = \text{II} - 5\cdot\text{III} \\ \text{III} & 0{,}1x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}2x_3 = 0{,}25 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{Ia} & -1{,}7x_2 - 0{,}3x_3 = -0{,}6 & \text{Ib} = 7\cdot\text{I} - 3\cdot\text{II} & \text{Ib} \quad -5\,x_2 = -1{,}5 \\ \text{IIa} & -2{,}3x_2 - 0{,}7x_3 = -0{,}9 & & \text{IIa} \quad -2{,}3x_2 - 0{,}7x_3 = -0{,}9 \\ \text{III} & 0{,}1x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}2x_3 = 0{,}25 & & \text{III} \quad 0{,}1x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}2x_3 = 0{,}25 \end{array}$$

Daraus erhält man $L = \{(0{,}4;\ 0{,}3;\ 0{,}3)\}$.

4. Lösungsmenge interpretieren: Von Sorte A benötigt man 0,4 kg, von Sorte B 0,3 kg und 0,3 kg von Sorte C.

Aufgaben

○ **1** Der tägliche Nahrungsbedarf eines Erwachsenen beträgt pro kg Körpergewicht 5 g Kohlenhydrate, etwa 0,9 g Eiweiß und 1 g Fett. Wie kann ein Erwachsener mit 75 kg Körpergewicht mit Kabeljau, Kartoffeln und Butter seinen täglichen Nahrungsbedarf decken? Rechnen Sie mit 400 g Kohlenhydraten, 75 g Eiweiß und 75 g Fett.

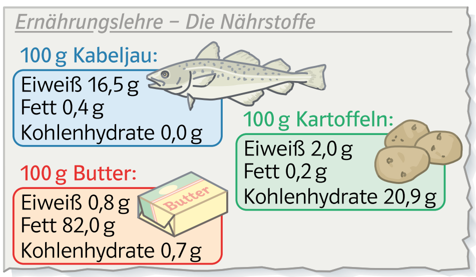


Fig. 2

○ **2** Die Quersumme einer dreiziffrigen Zahl ist gleich dem Dreifachen der ersten Ziffer. Die Summe der ersten und dritten Ziffer ist gleich der zweiten Ziffer. Die zweite und die dritte Ziffer ergeben zusammen 8. Bestimmen Sie die Zahl.

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: Uwe Alfer, Kråksmåla
Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

Test

Lösungen | Seite 231

○ **3** Im Versuchslabor eines Getränkeherstellers soll aus den drei angegebenen Mischgetränken A, B und C in Fig. 1 eine neue Sorte PLOP mit 50 % Fruchtsaftgehalt gemischt werden.

a) Wie viele cm^3 der Sorte C können für 1 Liter PLOP höchstens verwendet werden?

b) Wie kann man 1 Liter PLOP mit 20 % Maracujaanteil aus den drei Sorten mischen?

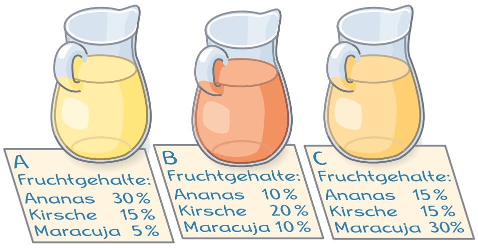


Fig. 1

○ **4** Bei einem Überlebenstraining wird auf drei Sorten A, B, C Konzentratnahrung zurückgegriffen. Jeder Konzentratwürfel wiegt 50 g. Wie kann ein Erwachsener (75 kg) damit seinen täglichen Nahrungsbedarf (400 g Kohlenhydrate, 75 g Eiweiß, 75 g Fett) decken?

Konzentrat	A	B	C
Eiweiß	5 g	10 g	7 g
Kohlenhydrate	40 g	30 g	30 g
Fett	5 g	10 g	13 g

Fig. 2

◒ **5** Untersuchen Sie mithilfe eines linearen Gleichungssystems, ob man aus Hartblei (91% Blei, 9 % Antimon) und Lötzinn (40 % Blei, 60 % Zinn) eine Bleilegierung mit 80 % Blei, 15 % Zinn und 5 % Antimon herstellen kann. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Mischungsanteile.

◒ **6** Ein Schwimmbecken kann durch drei Leitungen gefüllt werden. Um das Schwimmbecken zu füllen, benötigen die beiden ersten Leitungen zusammen 45 Minuten. Die erste und dritte Leitung brauchen zusammen eine Stunde. Die zweite und dritte Leitung schaffen es gemeinsam in eineinhalb Stunden. Wie lange braucht jede Leitung alleine zum Füllen? Nach wie vielen Minuten ist das Becken gefüllt, wenn alle drei Leitungen zusammen benutzt werden?

Test

Lösung | Seite 232

7 Beim Bau eines Hotels werden 70 Zimmer geplant. Es sind Einzelzimmer, Doppelzimmer und Dreibettzimmer vorgesehen. Insgesamt soll Platz für 135 Personen sein. Wie viele Zimmer von jeder Kategorie gibt es, wenn die Anzahl der Einzelzimmer zusammen mit der Anzahl der Dreibettzimmer gleich der Anzahl der Doppelzimmer sein soll?

● **8** Bei einem Automodell sind die Servolenkung S und die Klimaanlage K Sonderausstattungen. Bei 100 000 ausgelieferten Autos wurde S 65 100-mal und K 12 600-mal eingebaut.

a) Warum lässt sich aus den Angaben noch nicht schließen, wie oft weder S noch K, nur S, nur K oder beide Sonderausstattungen eingebaut wurden? Stellen Sie ein Gleichungssystem für die vier möglichen Ausstattungskombinationen auf.

b) Welche Mindestzahl an Käufern wählten keine Sonderausstattung?

c) Wie viele Käufer wählten keine Sonderausstattung, wenn K stets mit S bestellt wurde?

Grundwissen Test

Grundwissen Seite 216
Lösung | Seite 232

9 Bestimmen Sie die Lösungen.

a) $\sqrt{2x+5} = 1$ **b)** $\sqrt{x^2+1} = x - 2$ **c)** $\sqrt{x+2} = \sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3-2x} = x$ **e)** $x = \sqrt{2x+15}$ **f)** $\frac{x-1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x+2}$

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: Uwe Alfer, Kråksmåla

Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

Exkursion

Bei der Herstellung von chemischen Produkten wie z.B. Verdünnungen, Mineralölen oder Arzneimitteln müssen Stoffe miteinander gemischt werden. Für einfache Mischungsrechnungen haben die Chemiker eigene mathematische Methoden entwickelt, die sich auf das Lösen linearer Gleichungssysteme zurückführen lassen.

Problem
Aus 10%iger und 45%iger Essigsäurelösung soll 30%ige Essigsäurelösung hergestellt werden.

Erarbeitung
Man mischt $30 - 10 = 20$ Anteile der 45%igen Essigsäurelösung mit $45 - 30 = 15$ Anteilen der 10%igen Essigsäurelösung. In der Chemie berechnet man dies mit dem **Mischungskreuz**.

Beispiel:
Gegeben: 10% ↘ ↗ 15 Anteile
Gesucht: 30%
Gegeben: 45% ↗ ↘ 20 Anteile

Allgemein (b > a):
Gegeben: a% ↘ ↗ (b − x) Anteile
Gesucht: x%
Gegeben: b% ↗ ↘ (x − a) Anteile

Beweis:
Man mischt eine 10%ige Lösung der Masse m_a mit einer 45%igen Lösung der Masse m_b und erhält eine 30%ige Lösung der Masse m_x.
Wegen der Erhaltung der Masse gilt:

Im Beispiel:

Für die Lösung

I $m_a + m_b = m_x$

Für die darin gelöste reine Essigsäure

II $\frac{10}{100}m_a + \frac{45}{100}m_b = \frac{30}{100}m_x$ IIa = 10 · II − I

I $m_a + m_b = m_x$

IIa $3{,}5\,m_b = 2\,m_x$

Aus IIa erhält man $m_b = \frac{20}{35}m_x$;

eingesetzt in I ergibt sich

$m_a = m_x - \frac{20}{35}m_x = \frac{15}{35}m_x$.

Es ist also $m_a : m_b = 15:20$.

Allgemein:

I $m_a + m_b = m_x$

II $\frac{a}{100}m_a + \frac{b}{100}m_b = \frac{x}{100}m_x$ IIa = $\frac{100}{a}$ · II − I

I $m_a + m_b = m_x$

IIa $\frac{b-a}{a}m_b = \frac{x-a}{a}m_x$

Aus IIa erhält man $m_b = \frac{x-a}{b-a}m_x$;

eingesetzt in I ergibt sich

$m_a = m_x - \frac{x-a}{b-a}m_x = \frac{b-x}{b-a}m_x$.

Es ist also $m_a : m_b = (b-x):(x-a)$.

Man rechnet mit der Masse, weil sich das Volumen beim Mischen ändern kann.

Ergebnis
Man mischt $(b - x)$ Anteile der a%igen Lösung mit $(x - a)$ Anteilen der b%igen Lösung.

1 a) Ein Liter 85%ige Salzsäure soll mit Wasser so verdünnt werden, dass sich 15%ige Salzsäure ergibt. Wie viel Wasser muss man zufügen?
b) Es soll 90%ige Schwefelsäure mit 15%iger Schwefelsäure so verdünnt werden, dass sich 30%ige Schwefelsäure ergibt. Wie viele Anteile muss man jeweils nehmen?

2 Ein Käseaufschnitt besteht aus Edamer und Gouda. Dabei kosten 100 g Edamer 2,80 € und 100 g Gouda 2,40 €. Der Aufschnitt soll zum Preis von 2,50 € für 100 g verkauft werden. Welche Anteile Edamer und Gouda muss er dann enthalten?

Das Mischungskreuz kann auch auf beliebige andere Aufgabenstellungen angewendet werden, die mit einem LGS mit zwei Unbekannten gelöst werden können.

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: iStockphoto, Calgary, Alberta (sykono)

Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

Lösungen | Seite 232

○ **1** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 \phantom{{}-8x_3} &= 19 \\ 4x_1 \phantom{{}-3x_2} - 8x_3 &= 20 \\ 5x_2 - 4x_3 &= -7 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 &= 14 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 10 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 8 \\ 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= -5 \\ 9x_1 - 3x_2 - x_3 &= -31 \end{aligned}$$

○ **2** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= -2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

○ **3** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 5 \\ -x_1 + 5x_2 &= 11 \\ x_1 + 10x_2 &= 19 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 - 5x_2 &= 11 \\ x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 6 \\ -6x_1 - 9x_2 &= -18 \\ 6x_1 + 9x_2 &= 18 \end{aligned}$$

○ **4** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

a) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 201 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2{,}01x_1 + x_2 + x_3 &= 201 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 1{,}99x_1 + x_2 + x_3 &= 201 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &= 200 \\ -x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$$

Beachten Sie:
Geringe Unterschiede können große Auswirkungen haben.

○ **5** Bestimmen Sie zwei verschiedene Darstellungen der Lösungsmenge des LGS.

a) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

○ **6** Geben Sie ein LGS mit der Lösungsmenge L an.

a) $L = \{(r + 4s;\ 3r;\ -2r + s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$

b) $L = \{(2r + 7s;\ 5r + 3s;\ r;\ s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$

c) $L = \{(r + 3;\ 4r + 5) \mid r \in \mathbb{R}\}$

d) $L = \{(4r + 1;\ r + 3;\ -r + 2) \mid r \in \mathbb{R}\}$

◒ **7** The college jogging team goes through jogging shoes like water. The coach usually orders three brands of jogging shoes which they obtain at cost: Gauss, Roebecks and K Scottish. Gauss cost the team \$50 per pair, Roebecks \$50 and K Scottish \$45. One year, the team went through a total of 120 pairs at a total cost of \$5,700. Given that the team went through as many pairs of Gauss as Roebecks, how many pairs of each brand of jogging shoes did they use?

◒ **8** Bestimmen Sie eine Darstellung der Lösungsmenge L und prüfen Sie, ob $T = L$ gilt.

a) $$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$
$T = \{(-7r;\ 3r;\ -2r;\ 0) \mid r \in \mathbb{R}\}$

b) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \phantom{{}-x_4} &= 0 \end{aligned}$$
$T = \{(s;\ -6r + s;\ -3r + s;\ 3r + s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$

◒ **9** Eine vierstellige positive ganze Zahl n hat die Quersumme 20. Die Summe der ersten beiden Ziffern ist 11, die Summe der ersten und letzten Ziffer ebenfalls. Die erste Ziffer ist um 3 größer als die letzte Ziffer. Bestimmen Sie die Zahl n.

◒ **10** Für medizinische Untersuchungen werden bestimmte Medikamente verabreicht, die anschließend im Körper abgebaut werden. Die Konzentration in $\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}$ im Blut lässt sich durch den Funktionsterm $f(t) = a \cdot t \cdot e^{-kt}$ mit $a > 0$ und $k > 0$ beschreiben. Hierbei ist t die Anzahl der Stunden nach der Verabreichung des Medikaments. Bestimmen Sie die Werte für a und k, wenn der höchste Wert der Konzentration $27\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}$ beträgt und 3 Stunden nach der Einnahme erreicht wird.

Text: Detlef Hoche

Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

11 Folgende Aufgaben stammen aus der „Vollständigen Anleitung zur Algebra" von Leonhard Euler. Stellen Sie jeweils ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses.

a) „Ein Maulesel und ein Esel tragen jeder etliche Pud. Der Esel beschwert sich über seine Last, und sagt zum Maulesel, wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich zweimal so viel als du. Darauf antwortet der Maulesel, wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich dreimal so viel als du. Wieviel Pud hat jeder getragen?"

b) „Eine Gesellschaft von Männern und Frauen sind in einem Wirtshaus: Jeder Mann gibt 25 Groschen, jede Frau aber 16 Groschen aus, und es stellt sich heraus, daß sämtliche Frauen einen Groschen mehr ausgegeben haben als die Männer. Wie viele Männer und Frauen sind es gewesen?"

c) „Drei Leute haben ein Haus gekauft für 100 Rthlr.; der erste verlangt vom anderen die Hälfte seines Geldes, weil er dann das Haus allein bezahlen könnte; der andere begehrt vom dritten $\frac{1}{3}$ seines Geldes, um das Haus allein bezahlen zu können; der dritte begehrt vom ersten $\frac{1}{4}$ seines Geldes, um das Haus allein bezahlen zu können. Wieviel Geld hat nun jeder gehabt?"

d) „Jemand kauft 12 Stück Tuch für 140 Rhtlr., davon sind 2 weiß, 3 schwarz und 7 blau. Nun koste ein Stück schwarzes Tuch 2 Rhtlr. mehr als ein weißes, und ein blaues 3 Rhtlr. mehr als ein schwarzes. Die Frage ist, wieviel kostet jedes?"

Leonhard Euler (1707–1783), ein Schweizer Mathematiker, lebte am Zarenhof in Petersburg und diktierte nach seiner Erblindung dieses Buch seinem Diener, einem ehemaligen Schneidergesellen. Der Diener soll beim Zuhören und Aufschreiben des Textes so viel gelernt haben, dass er die damalige Algebra völlig verstand!

12 Aus einem etwa 2000 Jahre alten chinesischen Mathematikbuch: „Jemand verkauft zwei Büffel und fünf Hammel, und er kauft 13 Schweine; dabei bleiben 1000 Münzen übrig. Verkauft er drei Büffel und drei Schweine, so kann er genau neun Hammel kaufen. Verkauft er sechs Hammel und acht Schweine, so fehlen ihm noch 600 Münzen, um fünf Büffel kaufen zu können. Wie viel kostet ein Büffel, ein Hammel, ein Schwein?"

13 Für die Innenwinkel α, β, γ eines Dreiecks gilt: α ist doppelt so groß wie β und β ist um 20° größer als γ. Bestimmen Sie die Größe von α, β, γ.

14 **a)** Auf einem Hof sind Enten, Hühner und Kaninchen mit zusammen 120 Füßen und 36 Köpfen. Es sind doppelt so viele Hühner wie Enten. Wie viele Enten, Hühner und Kaninchen sind es?

b) Jemand kauft Gänse zu je 10 Groschen, Hühner zu je 5 Groschen und Küken zu je 1 Groschen, insgesamt 50 Stück für 100 Groschen. Wie viele Gänse, Hühner und Küken werden gekauft?

15 Zwei ältere Ehepaare sind zusammen 290 Jahre alt. Die Männer sind zusammen 10 Jahre älter als die Frauen. Die Frauen sind gleich alt. Man schreibe ein Gleichungssystem auf und gebe mögliche Lösungen an.

16 Mit Briefmarken zu 10, 20, 30 und 50 Cent soll ein Portobetrag von 3 Euro zusammengestellt werden. Wie ist dies mit genau 10 Briefmarken möglich?

17 Für die Verkaufszahlen eines neuen Produktes ermittelt man die folgenden Werte.

Woche	1	2	3	4	5	6
verkaufte Stückzahl	36	61	79	94	108	117

Man vermutet, dass sich die abgesetzte Stückzahl pro Woche durch den Funktionsterm $f(x) = \frac{ax + 10}{bx + 10}$ beschreiben lässt.

a) Bestimmen Sie a und b mit Werten der ersten und letzten Woche. Runden Sie a und b auf ganze Zahlen. Welche Stückzahl kann man in der 15. Woche erwarten?

b) Benutzen Sie jetzt die Werte der 3. und 4. Woche, um a und b zu bestimmen. Um wie viel Prozent weicht der damit bestimmte Wert für die 15. Woche von dem aus Teilaufgabe a) ab?

Text: Detlef Hoche; Aus: „Vollständige Anleitung zur Algebra" von Leonhard Euler (1707-1783)
Abbildungen: akg-images, Berlin

Seite aus: Lambacher Schweizer Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

18 Ein kleines Kreuzfahrtschiff hat doppelt so viele Passagiere wie Kabinen. Die Anzahl der Passagiere zusammen mit der Anzahl des Servicepersonals ist um 30 weniger als die dreifache Anzahl der Kabinen. Die Anzahl der Kabinen, der Passagiere und des Servicepersonals beträgt zusammen das Fünffache des Alters des Kapitäns. Die Anzahl der Kabinen und des Servicepersonals zusammen mit dem Alter des Kapitäns übertrifft die Anzahl der Passagiere um 20. Berechnen Sie die Anzahl der Kabinen, der Passagiere, des Servicepersonals und das Alter des Kapitäns.

19 Die sehr widerstandsfähige Aluminiumlegierung Dural enthält außer Aluminium bis zu 5% Kupfer, bis zu 1,5% Mangan und bis zu 1,6% Magnesium.

a) Welche Legierungen mit 95% Aluminium und 3% Kupfer lassen sich aus den drei Duralsorten A, B, C in Fig. 1 herstellen? Geben Sie eine Beschreibung mithilfe einer Lösungsmenge.

b) Lässt sich aus den Duralsorten A, B, C eine Legierung herstellen, die 95% Aluminium, 3% Kupfer, 1,2% Mangan und 0,8% Magnesium enthält?

	A	B	C
Aluminium	96,0%	93,0%	93,2%
Kupfer	2,5%	4,0%	3,9%
Mangan	1,1%	1,4%	1,2%
Magnesium	0,4%	1,6%	1,7%

Fig. 1

20 Alpaka (Neusilber) ist eine Legierung aus Kupfer, Nickel und Zink. Aus den vier in der Tabelle angegebenen Sorten kann auf verschiedene Arten 100 g Alpaka mit einem Gehalt von 55% Kupfer, 23% Nickel und 22% Zink hergestellt werden. Bestimmen Sie die Legierungen mit dem größten und dem kleinsten Anteil von Sorte IV.

	I	II	III	IV
Kupfer	40%	50%	60%	70%
Nickel	26%	22%	25%	18%
Zink	34%	28%	15%	12%

Fig. 2

21 Bei einem Geviert aus Einbahnstraßen (Fig. 3) sind die Verkehrsdichten (Fahrzeuge pro Stunde) für die zu- und abfließenden Verkehrsströme bekannt. Stellen Sie ein LGS für die Verkehrsdichten x_1, x_2, x_3, x_4 auf und bearbeiten Sie folgende Fragestellungen:

a) Ist eine Sperrung des Straßenstücks AD ohne Drosselung des Zuflusses möglich?

b) Welche ist die minimale Verkehrsdichte auf dem Straßenstück AB?

c) Welche ist die maximale Verkehrsdichte auf dem Straßenstück CD?

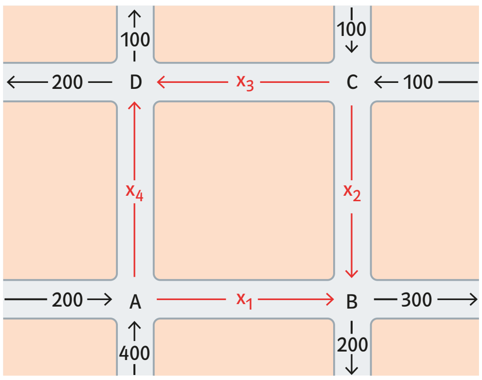


Fig. 3

22 In einem elektrischen Schaltkreis ist die Summe aus den in einen Knoten fließenden Strömen gleich der Summe der aus dem Knoten herausfließenden Ströme. Ebenso ist die Summe der Spannungen in jeder Masche Null. Nach dem ohmschen Gesetz gilt für jeden Widerstand $U = R \cdot I$. Stellen Sie insgesamt drei Gleichungen für den Knoten K und die Maschen M_1 und M_2 auf und berechnen Sie daraus die Stromstärken I_1, I_2, I_3.

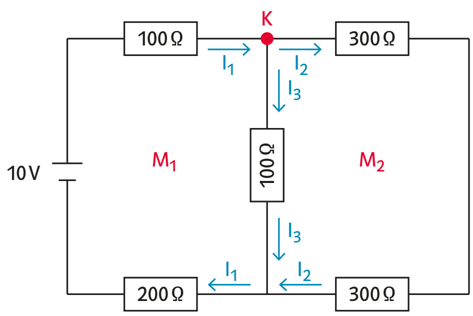


Fig. 4

Test

Kopiervorlage
Check-out
i9q62n

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: Uwe Alfer, Kråksmåla; imprint, Zusmarshausen

Seite aus: Lambacher Schweizer Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

I Lineare Gleichungssysteme

Gauß-Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme mit n Variablen
1. Man eliminiert mithilfe einer Gleichung durch Äquivalenzumformungen die Variable x_1 aus allen anderen Gleichungen.
2. Mit den restlichen Gleichungen verfährt man nun schrittweise genauso für die Variablen $x_2, x_3, \dots, x_n$.
3. Man löst die Gleichungen der Stufenform schrittweise nach den Variablen $x_n, \dots, x_2, x_1$ auf.

Dann bestimmt man die Lösungsmenge.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 0 \\
\text{II} & -2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 9 \quad \text{II a} = \text{II} + 2\cdot\text{I} \\
\text{III} & 3x_1 + 8x_2 - 7x_3 & = & 13 \quad \text{III a} = \text{III} - 3\cdot\text{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 0 \\
\text{II a} & 5x_2 - 3x_3 & = & 9 \\
\text{III a} & 5x_2 - x_3 & = & 13 \quad \text{III b} = \text{III a} - \text{II a}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 0 \\
\text{II a} & 5x_2 - 3x_3 & = & 9 \\
\text{III b} & 2x_3 & = & 4
\end{array}$$

$L = \{(1;\ 3;\ 2)\}$

Um Schreibarbeit zu sparen, kann man ein lineares Gleichungssystem als Matrix angeben.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 9 \\ 3 & 8 & -7 & 13 \end{array}\right)$$

Lösungsmenge

Man bestimmt die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, indem man es durch Äquivalenzumformungen in Stufenform bringt.
- Entsteht dabei eine Gleichung, die keine Lösung hat, so ist die Lösungsmenge leer.
- Kann man für eine Variable einen Parameter einführen, dann gibt es unendlich viele Lösungen.
- In allen anderen Fällen kann man durch Rückwärtseinsetzen genau eine Lösung bestimmen.

$$\begin{array}{rcl}
2x_1 - x_2 + 7x_3 & = & 11 \\
-4x_2 + 4x_3 & = & -8 \\
0 & = & 2
\end{array}$$

$L = \{\ \}$

$$\begin{array}{rcl}
2x_1 - x_2 + 7x_3 & = & 12 \\
-4x_2 + 4x_3 & = & -8 \\
0 & = & 0
\end{array}$$

$L = \{(7 - 3t;\ 2 + t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{array}{rcl}
2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 11 \\
-4x_2 + 4x_3 & = & -8 \\
5x_3 & = & 15
\end{array}$$

$L = \{(5;\ 5;\ 3)\}$

Anwendungen linearer Gleichungssysteme.

Lösen von Anwendungsaufgaben mithilfe linearer Gleichungssysteme:
1. Festlegen von Variablen für die gesuchten Größen
2. Aufstellen des linearen Gleichungssystems
3. Lösen des linearen Gleichungssystems
4. Interpretation der Lösungsmenge

Ein Dreieck hat einen Umfang von 18 cm, die beiden kürzeren Seiten sind zusammen 2 cm länger als die längste. Diese ist 4 cm länger als die kürzeste.

1. Die Seitenlängen heißen a, b, c
2. $$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & a + b + c & = & 18 \\
\text{II} & -a + b + c & = & 2 \\
\text{III} & a \quad\ - c & = & 4
\end{array}$$
3. Lösung ist $a = 8;\ b = 6;\ c = 4$.
4. Das Dreieck hat die Seitenlängen 8 cm, 6 cm und 4 cm.

Text: Detlef Hoche

Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

Runde 1

Lösungen | Seite 234

1 Lösen Sie das LGS mit dem Gauß-Verfahren.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= -12 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 11 \end{aligned}$$

2 Geben Sie ein LGS an, das die Lösungsmenge $L = \{(t;\ 2t-1;\ t);\ t \in \mathbb{R}\}$ hat.
Weisen Sie dies durch eine Probe nach.

3 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 7 \\ x_1 \qquad + 10x_3 &= 3 \end{aligned}$$

4 Ein deutscher Automobilhersteller produziert einen Geländewagen in den USA, Mexiko und Deutschland zum Verkauf in den USA. Insgesamt kann er 1,5 Mio. der produzierten Fahrzeuge in die USA verkaufen. Die Importe in die USA sollen die Hälfte der dort verkauften Fahrzeuge ausmachen. Wegen der hohen Überführungskosten sollen in Amerika (USA + Mexiko) doppelt so viele Fahrzeuge für die USA produziert werden wie in Deutschland. Wie ist die Produktion auf die drei Länder aufzuteilen?

Runde 2

Lösungen | Seite 235

1 Bestimmen Sie die Lösung des LGS: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

2 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS: $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 7x_3 &= 9 \end{aligned}$

3 Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Hat ein LGS weniger Gleichungen als Variablen, dann hat es nie genau eine Lösung.

b) Hat ein LGS mehr Gleichungen als Variablen, dann ist seine Lösungsmenge leer.

c) Hat ein LGS mehr als eine Lösung, dann hat es unendlich viele Lösungen.

4 **a)** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS mit der einzigen Gleichung $2x_1 + x_2 = 3$ und veranschaulichen Sie die Lösungsmenge in einem x_1x_2-Koordinatensystem.

b) Erläutern Sie, warum das LGS $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$ eine eindeutige Lösung besitzt. Leiten Sie daraus eine allgemeine Aussage über die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen her.

5 Bei dem Viereck ABCD in Fig. 1 sind gleich gefärbte Winkel gleich groß. Bestimmen Sie die Größe der Winkel α, β, γ, δ des Vierecks, wenn gilt:

a) α ist doppelt so groß wie β und die Winkelsumme von β und δ ist gleich 2γ,

b) α ist um 40° kleiner als β und die Winkelsumme von β und δ ist gleich 4γ.

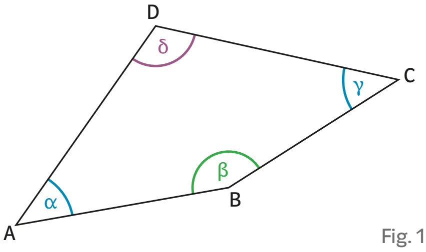


Fig. 1

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: Uwe Alfer, Kråksmåla

Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

Schätzen Sie sich mithilfe der Checkliste ein.

	☺	😐	☹
1. Ich kann lineare Gleichungen lösen.	☐	☐	☐
2. Ich kann die Lösungsmenge einer linearen Gleichung angeben.	☐	☐	☐
3. Ich kann lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen lösen.	☐	☐	☐
4. Ich kann aus einem Text Informationen übernehmen und diese mithilfe von Variablen algebraisch ausdrücken.	☐	☐	☐

Lerntipps

zu 1. und 2.
Grundwissen, Seite 216

Kopiervorlage
Checkliste
2ck9cp

Lösungen | Seite 270

Überprüfen Sie Ihre Einschätzungen.

○ **1 Lineare Gleichungen lösen**

Bestimmen Sie die Lösung der linearen Gleichung.

a) $2x + 3 = 7 - 3x$ **b)** $5x - 4 = 6(1 - x) + 12$ **c)** $4(x - 3) + 1 = -5(2 + x) + 8$

○ **2 Lösungsmenge einer linearen Gleichung bestimmen**

Bestimmen Sie die Löungsmenge der Gleichung.

a) $2(x + 1) = (x - 1)$ **b)** $x + 2 = 3 + x$ **c)** $3(x + 5) = 2x + 15 + x$

○ **3 Lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen lösen**

Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems.

a) $\begin{aligned} y &= 5x + 1 \\ y &= 7x - 3 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x + 4y &= 14 \\ x - 3y &= \ \ 0 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 2x - 3y &= -5 \\ 4x - 2y &= \ \ 2 \end{aligned}$

○ **4 Textaufgabe algebraisch formulieren**

Die Familien Schmitz und Wagner möchten zusammen in den Urlaub fahren Dazu mieten sie ein Ferienhaus für drei Wochen. Leider hat Herr Schmitz nur zwei Wochen Urlaub und deshalb können sie das Haus nur zwei Wochen gemeinsam nutzen. Für die letzte Woche übernimmt also Familie Wagner die kompletten Kosten. Zur Anreise haben sie ein Gruppenticket bei der Bahn gebucht. Fam. Schmitz sind 4 Personen, Fam. Wagner sind 3 Personen.
Familie Schmitz zahlt insgesamt 1100 € und Familie Wagner 1700 €.
Wie viel hat die Ferienwohnung und wie viel hat das Gruppenticket gekostet?

Text: Detlef Hoche

Seite aus: Lambacher Schweizer Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

I Lineare Gleichungssysteme

Seite 11

4

a) $(0; 5; 11; -10)$ b) $(1; 1; -1; -1)$ c) $(1; 2, 3, 4)$

Seite 12

7

a) $(2; 2; 1; 0)$ b) $(0; 1; 0; 1)$

9

a) $a - b$ b) $st(-2t-5)$ c) $\frac{x}{y}$

Seite 15

7

a) $(4; 1; 1)$ b) $\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{2}; 0\right)$ c) $\left(\frac{7}{4}; -\frac{7}{2}; 2\right)$

8

a) $(-2; 1; 2)$ b) $\left(11; -9; \frac{1}{2}\right)$ c) $(1; 0; 14)$

Seite 16

12

a) $(1; -1; 0)$ b) $(-2; 1; 5)$ c) $(2; 2; -4)$

15

a) $\frac{3}{x^2} = \frac{2}{x} \quad | \cdot x^2$

$\Leftrightarrow\ 3 = 2x$

$\Leftrightarrow\ x = 1{,}5$

$L = \{1{,}5\}$

b) $x + 2 = \frac{3}{x} \quad | \cdot x$

$\Leftrightarrow\ x^2 + 2x = 3$

$\Leftrightarrow\ x^2 + 2x - 3 = 0$

$L = \{-3; 1\}$

c) $\frac{2}{x} + \frac{6}{x^3} = \frac{7}{x^2} \quad | \cdot x^3$

$\Leftrightarrow\ 2x^2 + 6 = 7x$

$\Leftrightarrow\ 2x^2 - 7x + 6 = 0$

$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4}$

$L = \{1{,}5; 2\}$

Seite 19

6

a) $L = \{(4; -2; -2)\}$ b) Keine Lösung.

c) $L = \{(-t-1;\ 2t-1;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

7

a) $L = \{(18 - 17t;\ 7t - 6;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

b) Keine Lösung.

c) $L = \{(-6t+1;\ 9t+1;\ 5t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Seite 20

13

a) Keine Lösung. b) $L = \{(1; 1; -2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

c) $L = \{(-t-2; t; 5t+5) \mid t \in \mathbb{R}\}$

14

Individuelle Lösung, zum Beispiel:

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 7 \\ x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

20

a) $L = \{1{,}25\}$ b) $L = \{-5{,}5\}$ c) $L = \{1\}$

d) $L = \{2; 6\}$ e) $L = \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}\}$ f) $L = \{\ \}$

Seite 23

3

a) 1. Variablen einführen: Anteil A: x_1; Anteil B: x_2; Anteil C: x_3

2. Gleichungen aufstellen:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}6x_3 &= 0{,}5 \end{aligned}$$

3. Lösung: $x_1 = 1 - 2x_3;\ x_2 = x_3$

4. Ergebnis interpretieren:
Da $x_1; x_2; x_3 \geq 0$ sein muss, folgt $x_3 \leq 0{,}5$. Es können höchstens 500 cm³ der Sorte C verwendet werden.

b) Gleichungen aufstellen:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}6x_3 &= 0{,}5 \\ 0{,}05x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}3x_3 &= 0{,}2 \end{aligned}$$

Lösung: $x_1 = 0;\ x_2 = 0{,}5;\ x_3 = 0{,}5$

Ergebnis interpretieren:
Mit je 500 cm³ der Sorten B und C kann man 1 l PLOP mit 20 % Maracujaanteil mischen.

4

1. Variablen einführen: Anzahl A: x_1; Anzahl B: x_2; Anzahl C: x_3

2. Gleichungen aufstellen:
$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 &= 75 \\ 40x_1 + 30x_2 + 30x_3 &= 400 \\ 5x_1 + 10x_2 + 13x_3 &= 75 \end{aligned}$$

3. Lösung: $x_1 = 7;\ x_2 = 4;\ x_3 = 0$

4. Ergebnis interpretieren:
Um seinen täglichen Nahrungsbedarf zu decken, benötigt ein Erwachsener 7 Würfel A und 4 Würfel B.

Text: Detlef Hoche

Seite aus: Lambacher Schweizer Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

7

Anzahl der Einzelzimmer sei x, Anzahl der Doppelzimmer sei y und Anzahl der Dreibettzimmer sei z. Dann gilt

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & x + y + z &=& 70 \\
\text{II} & x + 2y + 3z &=& 135 \\
\text{III} & x - y + z &=& 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\\
\text{IIa} = \text{II} - \text{I} \\
\text{IIIa} = \text{III} - \text{I}
\end{array}
\quad
\begin{array}{rcl}
x + y + z &=& 70 \\
y + 2z &=& 65; \\
-2y &=& -70
\end{array}$$

$y = 35;\ z = 15;\ x = 20.$

Es sind 20 Einzelzimmer, 35 Doppelzimmer und 15 Dreibettzimmer.

9

a) $\sqrt{2x+5} = 1 \qquad |(\ )^2$

$2x + 5 = 1$, also $x = -2$

Eine Probe bestätigt das Ergebnis.

b) $\sqrt{x^2+1} = x - 2 \qquad |(\ )^2$

$x^2 + 1 = x^2 - 4x + 4$

$\Leftrightarrow\ 4x = 3$, also $x = 0{,}75$

Eine Probe zeigt, dass dies keine Lösung ist.

c) $\sqrt{x+2} = \sqrt{-x} \qquad |(\ )^2$

$x + 2 = -x$

$\Leftrightarrow\ 2x = -2$, also $x = -1$

Eine Probe bestätigt das Ergebnis.

d) $\sqrt{3-2x} = x \qquad |(\ )^2$

$3 - 2x = x^2$

$\Leftrightarrow\ x^2 + 2x - 3 = 0$

$x_{1,2} = -3;\ 1$

Eine Probe zeigt, dass $x_1 = -3$ keine Lösung und $x_2 = 1$ eine Lösung ist.

e) $x = \sqrt{2x+15} \qquad |(\ )^2$

$x^2 = 2x + 15$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$x_{1,2} = -3;\ 5$

Eine Probe zeigt, dass $x_1 = -3$ keine Lösung und $x_2 = 5$ eine Lösung ist.

f) $\frac{x-1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x+2} \qquad |\cdot\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow\ x - 1 = \sqrt{x}\sqrt{x+2} \qquad |(\ )^2$

$x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x$

$\Leftrightarrow\ 4x - 1 = 0$, also $x = \frac{1}{4}$

Eine Probe zeigt, dass dies keine Lösung ist.

Seite 25

1

a) $L = \{(11;\ 1;\ 3)\}$ **b)** $L = \{(0;\ 6;\ 2)\}$ **c)** $L = \{(-2;\ 3;\ 4)\}$

2

a) $L = \{(t;\ 2;\ t)\,|\,t \in \mathbb{R}\}$

b) $L = \{(1-t;\ 2t+2;\ t)\,|\,t \in \mathbb{R}\}$

c) $L = \{(t;\ -t;\ t)\,|\,t \in \mathbb{R}\}$

3

a) $L = \{(-1;\ 2)\}$

b) $L = \{\ \}$

c) $L = \{(3 - 1{,}5t;\ t)\,|\,t \in \mathbb{R}\}$

4

a) $L = \{\ \}$

b) $L = \{(100;\ -100;\ 100)\}$

c) $L = \{(-100;\ 100;\ 300)\}$

5

a) Z.B. $L = \{r(-5;\ -3;\ 1;\ 0) + s(-7;\ -2;\ 0;\ 1)\,|\,r, s \in \mathbb{R}\}$ oder

$L = \{r(-12;\ -5;\ 1;\ 1) + s(2;\ -1;\ 1;\ -1)\,|\,r, s \in \mathbb{R}\}$

b) Z.B. $L = \{r(-17;\ 6;\ 4;\ 0) + s(3;\ -1;\ 0;\ 1)\,|\,r, s \in \mathbb{R}\}$ oder

$L = \{r(-14;\ 5;\ 4;\ 1) + s(-20;\ 7;\ 4;\ -1)\,|\,r, s \in \mathbb{R}\}$

c) Z.B. $L = \{r(-1;\ 1;\ 2;\ 0) + s(7;\ -15;\ 0;\ 10)\,|\,r, s \in \mathbb{R}\}$ oder

$L = \{r(6;\ -14;\ 2;\ 10) + s(-8;\ 16;\ 2;\ -10)\,|\,r, s \in \mathbb{R}\}$

6

a) $x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0$

b) $x_1 - 2x_3 - 7x_4 = 0$

$x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0$

c) $4x_1 - x_2 = 7$

d) $x_2 + x_3 = 5$

$x_1 + 4x_3 = 9$

7

x_1: pairs Gauss,

x_2: pairs Roebecks,

x_3: pairs K Scottish.

$$\text{LGS:}\quad \begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + x_3 &=& 120 \\
50x_1 + 50x_2 + 45x_3 &=& 5700 \\
x_1 &=& x_2
\end{array}$$

$L = \{(30;\ 30;\ 60)\}$

8

a) $L = \{r(5;\ -2;\ 2;\ 0) + s(9;\ -4;\ 0;\ 2)\,|\,r, s \in \mathbb{R}\}$

$L \neq T$, da z.B. $(9;\ -4;\ 0;\ 2) \notin T$

b) $L = \{r(1;\ 3;\ 2;\ 0) + s(1;\ -1;\ 0;\ 2)\,|\,r, s \in \mathbb{R}\}$

$L = T$, da $(1;\ 3;\ 2;\ 0) = (1;\ 1;\ 1;\ 1) - \frac{1}{3}(0;\ -6;\ -3;\ 3)$ und

$(1;\ -1;\ 0;\ 2) = (1;\ 1;\ 1;\ 1) + \frac{1}{3}(0;\ -6;\ -3;\ 3)$

9

$n = 7454$

10

Für f mit $f(t) = a \cdot t \cdot e^{-kt}$ erhält man mithilfe der Produkt- und Kettenregel: $f'(t) = a \cdot e^{-kt} - a \cdot k \cdot t \cdot e^{-kt} = (1 - kt) \cdot a \cdot e^{-kt}$.

Aus den Angaben folgt: $f(3) = 27$ und $f'(3) = 0$.

Damit ergibt sich: (I) $3 \cdot a \cdot e^{-3k} = 27$ und

(II) $(1 - 3k) \cdot a \cdot e^{-3k} = 0$.

Da $a > 0$ und $e^{-3k} > 0$ folgt aus (II) $1 - 3k = 0$ und daraus $k = \frac{1}{3}$.

Aus (I) folgt damit $a = 9e$.

Damit ergibt sich $f(t) = 9 \cdot e \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$. Der Graph von f hat an der Stelle $t = 3$ das geforderte Maximum.

Seite 26

11

a) m: Anzahl der Pud des Maulesels,

e: Anzahl der Pud des Esels.

$$\text{LGS:}\quad \begin{array}{rcl}
e + 1 &=& 2(m - 1) \\
m + 1 &=& 3(e - 1)
\end{array}$$

$L = \left\{\left(\frac{11}{5};\ \frac{13}{5}\right)\right\}$

Text: Detlef Hoche

Seite aus: Lambacher Schweizer Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

b) m: Anzahl der Männer,
f: Anzahl der Frauen.
$16f - 25m = 1$

$f = \frac{1 + 25m}{16}$

Die Zahl $1 + 25m$ ist durch 16 ohne Rest teilbar, wenn gilt:
$m = 16n + 7$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
Lösung mit der kleinsten Anzahl: $m = 7$ und $f = 11$.

c) LGS:
$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \phantom{+ \tfrac{1}{3}x_3} &= 100 \\ x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 &= 100 \\ \tfrac{1}{4}x_1 + x_3 &= 100 \end{aligned}$$

$L = \{(64; 72; 84)\}$

d) w: Anzahl weißer Tücher,
s: Anzahl schwarzer Tücher,
b: Anzahl blauer Tücher.

LGS:
$$\begin{aligned} 2w + 3s + 7b &= 140 \\ -w + s &= 2 \\ -s + b &= 3 \end{aligned}$$

$L = \left\{\left(\frac{33}{4}; \frac{41}{4}; \frac{53}{4}\right)\right\}$

12

b: Anzahl der Büffel,
h: Anzahl der Hammel,
s: Anzahl der Schweine.

LGS:
$$\begin{aligned} 2b + 5h - 13s &= 1000 \\ 3b - 9h + 3s &= 0 \\ -5b + 6h + 8s &= -600 \end{aligned}$$

$L = \{(1200; 500; 300)\}$

13

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180° \\ \alpha - 2\beta &= 0° \\ \beta - \gamma &= 20° \end{aligned}$$

$L = \{(100°; 50°; 30°)\}$

14

a) e: Anzahl der Enten,
h: Anzahl der Hühner,
k: Anzahl der Kaninchen.

LGS:
$$\begin{aligned} 2e + 2h + 4k &= 120 \\ e + h + k &= 36 \\ 2e - h &= 0 \end{aligned}$$

$L = \{(4; 8; 24)\}$
4 Enten, 8 Hühner, 24 Kaninchen

b) g: Anzahl der Gänse,
h: Anzahl der Hühner,
k: Anzahl der Küken.

LGS:
$$\begin{aligned} 10g + 5h + k &= 100 \\ g + h + k &= 50 \end{aligned}$$

$L = \left\{\left(-30 + \frac{4}{5}k; 80 - \frac{9}{5}k; k\right) \middle| k \in \mathbb{R}\right\}$

Da die Anzahlen positiv sein müssen, folgt $38 \le k \le 44$. Da außerdem k durch 5 teilbar sein muss, bleibt nur $k = 40$. Es sind also 2 Gänse, 8 Hühner und 40 Küken.

15

m_1, m_2: Alter der Männer,
f_1, f_2: Alter der Frauen.

LGS:
$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + f_1 + f_2 &= 290 \\ m_1 + m_2 - f_1 - f_2 &= 10 \\ f_1 - f_2 &= 0 \end{aligned}$$

$L = \{(150 - k; k; 70; 70) \mid k \in \mathbb{R}\}$

16

x_1: Anzahl der 10-ct-Marken,
x_2: Anzahl der 20-ct-Marken,
x_3: Anzahl der 30-ct-Marken,
x_4: Anzahl der 50-ct-Marken.

LGS:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ 10x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 50x_4 &= 300 \end{aligned}$$

$L = \{(-10 + 3r + s; 20 - 4r - 2s; s; r) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$
Aus $20 - 4r - 2s \ge 0$ folgt $4r + 2s \le 20$. Daraus folgt, dass $r \le 5$ sein muss.
Für $r = 5$ lautet die Lösungsmenge:
$L = \{(5 + s; -2s; s; 5)\}$.
$-2s$ ist aber für jede Einsetzung von $s > 0$ negativ, also keine Lösung möglich.
Für $r = 4$ lautet die Lösungsmenge:
$L = \{(2 + s; 4 - 2s; s; 4)\}$.
Für $s = 1$ erhält man (3; 2; 1; 4).
Für $s = 2$ erhält man (4; 0; 2; 4).
$s \ge 3$ keine Lösung.
Analog untersucht man die Lösungsmenge für $r = 3; 2; 1; 0$.
Mögliche Aufteilungen:

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	10	0
0	2	7	1
0	4	4	2
0	6	1	3
1	0	8	1
1	2	5	2
1	4	2	3
2	0	6	2
2	2	3	3
3	0	4	3
3	2	1	4
4	0	2	4

17

a) LGS:
$$\begin{aligned} a - 36b &= 350 \\ 6a - 702b &= 1160 \end{aligned}$$

Lösung: $a \approx 419{,}63$; $b \approx 1{,}93$
Wähle $a = 420$ und $b = 2$. $f(x) = \frac{(420x - 10)}{(2x - 10)}$;
$f(15) = 157{,}75$; man würde für die 15. Woche etwa 157 verkaufte Stücke erwarten.

Text: Detlef Hoche
Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

b) LGS: $\begin{aligned} 3a - 237b &= 780 \\ 4a - 376b &= 930 \end{aligned}$

Lösung: $a \approx 404{,}83$; $b \approx 1{,}83$

Wähle $a = 405$ und $b = 2$. $f(x) = \frac{405x - 10}{2x - 10}$;

$f(15) = 152{,}13$; man würde für die 15. Woche etwa 152 verkaufte Stück erwarten. Dies entspricht etwa 96,81 % des Wertes aus a).

Seite 27

18

x_1: Alter des Kapitäns,
x_2: Anzahl der Passagiere,
x_3: Anzahl des Servicepersonals,
x_4: Anzahl der Kabinen.

LGS: $\begin{aligned} x_2 - 2x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 &= -30 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 20 \end{aligned}$

$L = \{(50;\ 140;\ 40;\ 70)\}$

Der Kapitän ist 50 Jahre alt, es sind 140 Passagiere an Bord, das Servicepersonal besteht aus 40 Personen und das Schiff hat 70 Kabinen.

19

a) x_1; x_2; x_3 sind die Prozentangaben für die Sorten A, B und C.

LGS: $\begin{aligned} 96x_1 + 93x_2 + 93{,}2x_3 &= 95 \\ 2{,}5x_1 + 4x_2 + 3{,}9x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

Lösung: $L = \left\{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{15}t;\ \frac{1}{3} - \frac{14}{15}t;\ t\right) \middle|\ t \in \mathbb{R}\right\}$.

Für t gilt: $0 \le t \le \frac{5}{14}$.

b) x_1; x_2; x_3 sind die Prozentangaben für die Sorten A, B und C.

LGS: $\begin{aligned} 96x_1 + 93x_2 + 93{,}2x_3 &= 95 \\ 2{,}5x_1 + 4x_2 + 3{,}9x_3 &= 3 \\ 1{,}1x_1 + 1{,}4x_2 + 1{,}2x_3 &= 1{,}2 \\ 0{,}4x_1 + 1{,}6x_2 + 1{,}7x_3 &= 0{,}8 \end{aligned}$

Lösung: $L = \left\{\left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ 0\right)\right\}$.

20

Man erhält das LGS:

$$\begin{aligned} 40x_1 + 50x_2 + 60x_3 + 70x_4 &= 55 \\ 26x_1 + 22x_2 + 25x_3 + 18x_4 &= 23 \\ 34x_1 + 28x_2 + 15x_3 + 12x_4 &= 22 \end{aligned}$$

$L = \left\{\left(-\frac{1}{14} + \frac{10}{7}k;\ \frac{9}{14} - \frac{13}{7}k;\ \frac{3}{7} - \frac{4}{7}k;\ k\right) \middle|\ k \in \mathbb{R}\right\}$

Da alle Anteile positiv sein müssen, erhält man für den Anteil k der Sorte IV:

$\frac{1}{20} \le k \le \frac{9}{26}$.

21

Man erhält das LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 500 \\ x_1 + x_4 &= 600 \\ x_3 + x_4 &= 300 \\ x_2 + x_3 &= 200 \end{aligned}$$

$L = \{(600 - k;\ -100 + k;\ 300 - k;\ k) \mid k \in \mathbb{R}\}$

a) Die Sperrung von AD führt zu $k = 0$ und damit zu $x_2 = -100$, was aber nicht möglich ist.

b) Da $k \le 300$ gilt, ist die minimale Verkehrsdichte auf AB 300, da sonst x_3 negativ wird.

c) Da $k \ge 100$ gelten muss, damit x_2 nicht negativ wird, ist die Verkehrsdichte auf CD maximal 200.

22

$$\begin{array}{ll} K & I_1 = I_2 + I_3 \\ M_1 & 100I_1 + 100I_3 + 200I_1 = 10 \\ M_2 & 300I_2 + 300I_2 = 100I_3 \end{array}$$

daraus ergibt sich das LGS

$$\begin{array}{ll} \text{I} & I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ \text{II} & 300I_1 + 100I_3 = 10 \\ \text{III} & 600I_2 - 100I_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ \text{IIa} = \text{II} - 300\,\text{I} & 300I_2 + 400I_3 = 10 \\ \text{III} & 600I_2 - 100I_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ \text{IIa} & 300I_2 + 400I_3 = 10; \\ \text{IIIa} = 2\text{IIa} - \text{III} & 900I_3 = 20 \end{array}$$

Man erhält $I_3 = \frac{2}{90}$; $I_2 = \frac{1}{270}$; $I_1 = \frac{7}{270}$.

Im Stromkreis fließen die Ströme $I_1 \approx 25{,}9\,\text{mA}$; $I_2 \approx 3{,}7\,\text{mA}$; $I_3 \approx 22{,}2\,\text{mA}$.

Seite 29

Runde 1

1

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x_1 - x_2 + 2x_3 = -12 & \\ \text{II} & 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 & \text{IIa} = \text{II} - 4\cdot\text{I} \\ \text{III} & -x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 & \text{IIIa} = \text{III} + \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x_1 - x_2 + 2x_3 = -12 & \\ \text{IIa} & 6x_2 - 7x_3 = 47 & \\ \text{IIIa} & 2x_2 + x_3 = -1 & \text{IIIb} = \text{IIa} - 3\cdot\text{IIIa} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 - x_2 + 2x_3 = -12 \\ \text{IIa} & 6x_2 - 7x_3 = 47 \\ \text{IIIb} & -10x_3 = 50 \end{array}$$

Aus IIIb erhält man $x_3 = -5$. Eingesetzt in IIa ergibt dies $x_2 = 2$, was in I eingesetzt $x_1 = 0$ ergibt.
Lösung: (0; 2; −5).

2

Individuelle Lösung, zum Beispiel:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x_1 - x_2 + x_3 = 1 & \\ \text{II} & 2x_1 - x_2 = 1 & \text{IIa} = \text{II} - 2\cdot\text{I} \\ \text{III} & x_2 - 2x_3 = -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x_1 - x_2 + x_3 = 1 & \\ \text{IIa} & x_2 - 2x_3 = -1 & \\ \text{III} & x_2 - 2x_3 = -1 & \text{IIIa} = \text{IIa} - \text{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \text{IIa} & x_2 - 2x_3 = -1 \\ \text{IIIa} & 0 = 0 \end{array}$$

Man wählt $x_3 = t$. Daraus ergibt sich $x_2 = 2t - 1$ und $x_1 = t$.

Text: Detlef Hoche

Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

3

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &=& 0 \\ \text{II} & 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 &=& 7 \quad \text{IIa} = \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} & x_1 + 10x_3 &=& 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &=& 0 \\ \text{IIa} & x_1 + 10x_3 &=& 7 \\ \text{III} & x_1 + 10x_3 &=& 3 \quad \text{IIIa} = \text{III} - \text{IIa} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &=& 0 \\ \text{IIa} & x_1 + 10x_3 &=& 7 \\ \text{IIIa} & 0 &=& -4 \end{array}$$

$L = \{\ \}$

4

x Fahrzeuge in USA, y Fahrzeuge in Mexiko, z Fahrzeuge in Deutschland

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x + y + z &=& 1{,}5 \\ \text{II} & y + z &=& 0{,}75 \\ \text{III} & x + y - 2z &=& 0 \quad \text{IIIa} = \text{I} - \text{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x + y + z &=& 1{,}5 \\ \text{II} & y + z &=& 0{,}75 \\ \text{IIIa} & 3z &=& 1{,}5 \end{array}$$

$z = 0{,}5;\ y = 0{,}25;\ x = 0{,}75$

In Deutschland sollen 500 000, in Mexiko 250 000 und in USA 750 000 Pkw produziert werden.

Runde 2

1

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \qquad \text{IIa} = \text{I} - 2 \cdot \text{II}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{IIa} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Aus IIa erhält man $x_1 = 3$. Aus III folgt $x_2 = -1$ und aus I folgt $x_3 = 2$.

Lösung: $(3; -1; 2)$.

2

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 - 2x_2 + 5x_3 &=& 0 \\ \text{II} & 4x_1 + x_2 - 7x_3 &=& 9 \quad \text{IIa} = \text{II} - 4 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 - 2x_2 + 5x_3 &=& 0 \\ \text{IIa} & 9x_2 - 27x_3 &=& 9 \quad \text{IIb} = \frac{1}{9}\text{IIa} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 - 2x_2 + 5x_3 &=& 0 \\ \text{IIb} & x_2 - 3x_3 &=& 1 \end{array}$$

Man wählt $x_3 = t$. Dann ist $x_2 = 1 + 3t$ und $x_1 = 2 + t$.

Lösungsmenge: $L = \{(2 + t;\ 1 + 3t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

3

a) Falsch. Gegenbeispiel:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 &=& 1 \\ 0 &=& 5 \end{array}$$

hat keine Lösung.

b) Falsch. Gegenbeispiel:

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& 1 \\ x_1 + x_2 &=& 5 \\ x_1 + x_2 &=& 5 \end{array}$$

hat die Lösungsmenge $L = \{(1; 4)\}$.

c) Wahr. Laut Merkkasten auf Seite 17 hat ein LGS keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen.

4

a) $L = \{(t;\ 3 - 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $x_1 = t$, $x_2 = 3 - 2t$

Ersetzt man den Parameter t, so erhält man: $x_2 = -2x_1 + 3$.

Der Graph ist eine Gerade mit der Steigung −2 und dem Achsenabschnitt 3.

b) Jede der beiden Gleichungen hat für sich eine Lösungsmenge, die sich als Graph einer Geraden veranschaulichen lässt. Da die Geraden unterschiedliche Steigungen haben (2 und −2), existiert ein Schnittpunkt. Dessen Koordinaten entsprechen der eindeutigen Lösung des LGS.

Ein Gleichungssystem mit zwei Variablen hat keine Lösung, wenn die zu zwei seiner Gleichungen gehörenden Geraden parallel sind (oder die Geraden bei mehr als zwei Gleichungen verschiedene Schnittpunkte haben).

Die Lösung ist eindeutig, wenn die zu den Gleichungen gehörenden Geraden alle durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

Die Lösungsmenge ist unbegrenzt, wenn alle Gleichungen die gleiche Gerade darstellen.

5

a) LGS:
$$\begin{array}{rcl} \alpha + \beta + \gamma + \delta &=& 360° \\ \alpha - \gamma &=& 0° \\ \alpha - 2\beta &=& 0° \\ \beta - 2\gamma + \delta &=& 0° \end{array}$$

Lösung: $\alpha = 90°;\ \beta = 45°;\ \gamma = 90°;\ \delta = 135°$

b) LGS:
$$\begin{array}{rcl} \alpha + \beta + \gamma + \delta &=& 360° \\ \alpha - \gamma &=& 0° \\ \alpha - \beta &=& -40° \\ \beta - 4\gamma + \delta &=& 0° \end{array}$$

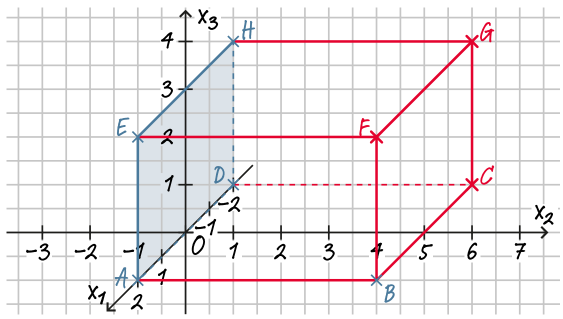
Lösung: $\alpha = 60°;\ \beta = 100°;\ \gamma = 60°;\ \delta = 140°$

II Orientieren und Bewegen im Raum

Seite 36

7

a)



b) C(−2 | 5 | 0), E(2 | 0 | 3), F(2 | 5 | 3), G(−2 | 5 | 3)

Text: Detlef Hoche
Abbildungen: Uwe Alfer, Kråksmåla

Seite aus: Lambacher Schweizer
Qualifikationsphase Analytische Geometrie Hessen
ISBN: 978-3-12-735751-6

Impressum

Autoren: Manfred Baum, Martin Bellstedt, Dr. Dieter Brandt, Gerhard Brüstle, Heidi Buck (†), Günther Dopfer, Prof. Rolf Dürr, Prof. Hans Freudigmann, Inga Giersemehl, Herbert Götz, Dieter Greulich, Dr. Frieder Haug, Manfred Herbst, Maren Herrmann, Edmund Herd, Prof. Detlef Hoche, Thomas Jörgens, Thorsten Jürgensen-Engl, Christine Kestler, Dr. Michael Kölle, Andreas König, Hans-Georg Kosuch, Prof. Dr. Detlef Lind, Dr. Johannes Novotný, Marion Rauscher, Rolf Reimer, Dr. Wolfgang Riemer, Dr. Rebecca Roy, Rüdiger Sandmann, Dr. Torsten Schatz, Hartmut Schermuly (†), Prof. Reinhard Schmitt-Hartmann, Ulrich Schönbach, Dr. Maximilian Selinka, Raphaela Sonntag, Heike Spielmans, Jörg Stark, Andrea Stühler, Barbara Sy, Thomas Thiessen, Dr. Heike Tomaschek, Prof. Dr. Ingo Weidig, Alexander Wollmann, Dr. Peter Zimmermann, Prof. Manfred Zinser, Arnold Zitterbart

Redaktion: Kerstin Helbig, Annegret Weimer
Herstellung**:** Simone Glauner

Illustrationen: Uwe Alfer, Kråksmåla; imprint, Zusmarshausen; Anja Malz, Taunusstein; Oehler, Sandra, Remseck; Büro für Gestaltung B2, Andreas Staiger, Stuttgart
Satz: imprint GmbH, Zusmarshausen